

Тақырыбы. Комбинаторика элементтері

Мысал 4.1. Біріншісі 0 мен 1 цифрлары бола алмайтын алты цифрлы барлық мүмкін телефон нөмірлерінің санын анықтаңыз.

Шешуі. Есепті шешу үшін комбинаториканың негізгі ережесін қолданамыз, бұл жағдайда жиындар саны $s = 6$. Бірінші жиын – $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ барлығы 8 элементтен тұрса, қалған 5 жиын $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ – 10 элементтен тұрады. Онда комбинаториканың негізгі ережесі бойынша, қаладағы барлық мүмкін телефон нөмірлерінің саны

$$N = 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 8 \cdot 10^5$$

болады, яғни

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, \dots, a_6) : a_1 = 2, 3, \dots, 9; a_k = 0, 1, \dots, 9, k = 2, 3, \dots, 6\}$$

болғанда $|\Omega| = 8 \cdot 10^5$ (осы жерде және төменде де кездескенде E жиындағы элементтер санын $|E|$ арқылы белгілейміз) екенін есептедік.

Мысал 4.2. Қазақстан Республикасы бойынша жеке меншік автокөліктерінің барлық мүмкін нөмірлері қанша?

Шешуі. Мысалға келтіретін болсақ, автокөлік нөмірі KZ 001 AAA 01 түрінде келеді. Алдыңғы екі таңба өзгермейтіндіктен әрекеттер (жиындар) саны $s = 7$ (соңғы таңба екі орынды деп қарастырылады). Алғашқы үш топ – $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ барлығы 10 элементтен, қалған 3 топ ағылшын әліпбиінен құралған $\{A, B, C, \dots, X, Y, Z\}$ түріндегі жиынның элементі, яғни 24 элементтен таңдалса, соңғы аумақтарды белгілейтін таңба 20 элементтен тұрады. Онда тағы да комбинаториканың негізгі ережесін тікелей қолданып,

еліміздегі барлық жеке меншік автокөліктерге арналған нөмірлер саны

$$N = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 20 = 24^3 \cdot 10^3 \cdot 20$$

санына тең болады. Ал нөмірлердің жиыны

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega = (KZ, a_1, a_2, \dots, a_7): a_k \\ &= 0, 1, \dots, 9 (k = 1, 2, 3); a_j \\ &= A, B, \dots, Z (j = 4, 5, 6); a_7 = 1, 2, \dots, 20\}.\end{aligned}$$

Мысал 4.3. Жәшікте 1 цифрінен 5 цифріне дейін нөмірленген бес шар бар. Шарлар бірінен кейін бірі кездейсоқ тәсілмен қайтарусыз түгелдей алынады. Шарларды қанша тәсілмен алуға болады.

Шешуі.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega = (a_1, a_2, \dots, a_5): a_k = 1, 2, 3, 4, 5; a_k \\ &\neq a_j (k \neq j, k, j = 1, 2, \dots, 5)\},\end{aligned}$$

бұл жерде де Ω жиынындағы элементтер санын комбинаториканың негізгі ережесін қолданып есептейік, бірінші шарды 5 түрлі тәсілмен алуға болса, екіншісі бірінші шар қайта жәшікке салынбағандықтан 4 түрлі тәсілмен таңдалады. Үшінші, төртінші, бесіншілердің де осылай мүмкіндіктері азая береді. Онда

$$|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Мысал 4.4. 5 адамнан тұратын топтан кезекшілікке 3 адамды қанша тәсілмен таңдап алуға болады?

Шешуі.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega = (a_1, a_2, a_3): a_k = 1, 2, 3, 4, 5; a_k \\ &\neq a_j (k, j = 1, 2, 3)\}\end{aligned}$$

жиынындағы элементтер санын таңдаманың барлық мүмкін жағдайларын толықтай тізіп жаза отырып санайық. Адамдарды шартты түрде 1, 2, 3, 4, 5 цифрлерімен белгілесек, онда

$$\Omega = \left\{ (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5), \right. \\ \left. (2,3,4), (2,3,5), (2,4,5), (3,4,5) \right\}.$$

Мұндағы, мысалға, (2,3,4) нөмірлі адамдардың таңдалған жағдайын алсақ, бірінші қайсысы, екіншісі қайсысы, үшінші қайсысы таңдалғаны маңызды емес және таңдап алынған адам қайтадан екінші рет таңдалына алмайды (ол қайтарымсыз және реттелмеген таңдама болады, бұндай таңдамалар санын есептейтін формула төменде беріледі). Сонымен, әзірге арнайы формуласыз, ешқандай ережесіз жиынның барлық элементтерін тізіп санау арқылы $|\Omega| = 10$ екендігін анықтадық.

Мысал 4.5. Таңдамалардың қайтарымды және қайтарымсыз, реттелген және реттелмеген болуына байланысты қанша түрі бар?

Шешуі. Комбинаториканың негізгі ережесін таңдамалардың екі тобына *қайтарымды* (Q), *қайтарымсыз* ($\bar{Q}$) және *Реттелген* (P), *Реттелмеген* ($\bar{P}$) қолданатын болсақ, (Q, P) , $(Q, \bar{P})$, $(\bar{Q}, P)$, $(\bar{Q}, \bar{P})$ төрт түрін аламыз.

Мысал 4.6. 3 кітапты сөреге неше тәсілмен орналастыруға болады?

Шешуі. Кітаптарды А, В, С әріптерімен белгілейік. Оқырманға түсінікті болу мақсатында барлық нәтижелерді кесте түрінде тізіп келтірейік.

Бірінші кітап	Екінші кітап	Үшінші кітап	Нәтиже
A	B	C	ABC
A	C	B	ACB
B	A	C	BAC
B	C	A	BCA
C	A	B	CAB
C	B	A	CBA

Санап шықсақ 6 тәсілмен орналастыруға болатындығын көреміз.

Әрине, элементтер саны айтарлықтай көп болғанда кесте түрінде жазып, санап отыру көп уақыт алатын ауқымды, әрі керек емес жұмыс болып табылады. Сондықтан, бұндай таңдама – алмастырудың санын жоғарыдағы ереже бойынша есептесек $N = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ болады.

Мысал 4.7. Айбек досының телефонының соңғы 3 цифрін ұмытып қалды. Ол цифрлар жұп екенін ғана біледі. Бұндай мүмкін нөмірлер қанша?

Шешуі. Телефон нөміріндегі цифрлер бірнеше рет кездесе беретіндіктен – қайтарымды, нөмірдегі цифрлардың орны маңызды болғандықтан – реттелген. Таңдама қайтарымды және реттелген болғандықтан, анықтама бойынша 5 (0, 2, 4, 6, 8 – жұп сандарынан) цифрдан 3 цифр арқылы құрылған қайтарымды орналастыру

$$\tilde{A}_5^3 = 5^3 = 125$$

санына тең.

Мысал 4.8. 4.7 мысалда Айбек соңғы цифрлар әртүрлі болғанын да есіне түсірді. Бұл жағдайда мүмкін нөмірлер саны қанша?

Шешуі. Цифрлар әртүрлі десек, онда таңдама реттелген болуымен қатар қайтарымсыз болады, яғни біз 5 цифрдан 3 бойынша алынған қайтарымсыз орналастыру жағдайына келеміз, олардың саны

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Мысал 4.9. Бинго лотереясының бір жолағында орналасқан 15 саннан тұратын комбинация саны қанша?
Шешуі. Бір бөлікте бір сан бірнеше рет кездеспейтіндіктен бұл таңдама қайтарымсыз, ал санның орны маңызсыз болғандықтан – реттелмеген болады, яғни бұл 90 санынан 15 саны бойынша жасалған таңдама –
 теру, яғни

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
 формуласын $n = 90, k = 15$ үшін қолданатын болсақ,

$$C_{90}^{15} = \frac{90!}{(90 - 15)! 15!} = \frac{90!}{75! 15!}.$$

Excel бағдарламасындағы ЧИСЛКОМБ(n, k) командасы арқылы n элементтен k бойынша алынған терулер саны анықталады. Төменде осы команда арқылы 4.9 мысалдың шығару жолы көрсетілген:

Мысал 4.10. Бір жағында ең көп дегенде 4 нүкте бола алатын домино тастарының саны қанша?

Шешуі. Доминоның тасындағы нүктелер саны бірдей бола алатындықтан, оларды қайтарымды және реттелмеген таңдама арқылы бейнелеуге болады, яғни 4 элементтен 2 элемент бойынша жасалған қайтарымды теру, ондай комбинациялар саны

$$C_{4+2-1}^2 = \frac{(4 + 2 - 1)!}{2! (4 - 1)!} = \frac{5!}{2! 3!} = 10.$$

Мысал 4.11. "Миссисипи" сөзінің әріптерінен қанша "сөз" (әріптер комбинациясын сөз деп қабылдаймыз) құрауға болады?

Шешуі. М әрпі 1 рет, И әрпі 4 рет, С әрпі 3 рет, П әрпі 1 рет кездеседі. Онда 4.6 -анықтамасындағы

формула бойынша $n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 3, n_4 = 1$ болғанда, сөздер саны

$$P_9(1,4,3,1) = \frac{9!}{1! 4! 3! 1!} = 2520.$$

Мысал 4.12. 100 студенттің 28-і ағылшын тілін, 30-ы неміс тілін, 42-і француз тілін, 8-і ағылшын және неміс тілін, 10-ы ағылшын және француз, 5-і неміс және француз тілін, 3 студент барлық 3 тілді үйреніп жүр. Неше студент бір де бір тілді үйреніп жүрген жоқ, тек ағылшын тілін неше адам оқуда, тек французды, тек немісті ше? Екі тілден аз тіл меңгеріп жүргендер қанша? Тек екі тілді қанша студент оқуда?

Шешуі. $|\Omega| = 100, |A| = 28, |B| = 30, |C| = 42$. Бірде бір тілді оқып жүрмеген студентті $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$ оқиғасы береді, онда

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| \\ &\quad - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \end{aligned}$$

$$= 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80$$

болғандықтан

$$|\Omega| - |A \cup B \cup C| = 100 - 80 = 20,$$

яғни 20 студент көрсетілген үш тілді оқып жүрген жоқ. Енді тек бір ғана тілді үйреніп жүрген студенттердің санын анықтайық:

$$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 28 - 8 - 10 + 3 = 13 \text{ тек ағылшын тілін,}$$

$$|B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 30 - 8 - 5 + 3 = 20 \text{ тек неміс тілін,}$$

$$|C| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 42 - 10 - 5 + 3 = 30 \text{ тек француз тілін}$$

үйреніп жүр.

Енді екі тілден аз тіл үйреніп жүрген студенттер, яғни не мүлдем тіл үйреніп жатпаған, не бір тілді ғана меңгеріп жатқан студенттер санына тоқталайық. Жоғарыда ешбір тілді үйреніп жүрмеген және тек бір ғана тілді үйреніп жүрген студенттердің санын анықтап алғандықтан, бұндай студенттер саны олардың қосындысы арқылы анықталады, яғни

$$20 + 13 + 20 + 30 = 83.$$

Тек екі ғана тіл оқыған студенттер саны

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 2|A \cap B \cap C| = 8 + 10 + 5 - 2 \cdot 3 = 17.$$

Тапсырмалар

Есеп 4.1. $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^k \cdot k! = A_n^k$ теңдіктерін дәлелдеңіз.

Есеп 4.2. 7 алма, 4 лимон және 9 апельсиннен 5 жемісті неше тәсілмен таңдап алуға болады? Ал егер 5 жемісті әртүрлі жемістердің екі түрін ғана алсақ таңдаулар саны қалай өзгереді? 2 алма, 1 лимон, 2 апельсинді неше әдіспен алуға болады?

Есеп 4.3. Екі А, бес В және тоғыз С әріптерінен саны бірден кем емес бестен аспайтын әріптен құралған неше сөз (бір не бірнеше әріптер комбинациясын сөз деп қабылдаймыз) құрауға болады? Ал әріптер қайталанбаса ше?

Есеп 4.4. Шеңбер бойынан 9 нүкте таңдап алынған.

а) Ұштары осы нүктеде жататын неше хорда жүргізуге болды?

б) Төбелері осы нүктелерде орналасқан қанша үшбұрыш бар?

с) Қанша дөңес сегізбұрыштар бар?

Есеп 4.5. 9 кітаптан 4 кітапты неше тәсілмен таңдап алуға болады? Ол кітаптардың ішіне белгілі бір кітап кіру керек болғанда неше тәсіл шығады? Сол белгіленіп алған кітап кірмеу керек болған жағдайда ше?

Есеп 4.6. Екі А және Б қалаларын жалғайтын теміржол бойында осы қалалардағы бекеттерді есептегенде барлығы 50 бекет бар. Әр билетте отыратын және түсетін бекеттер көрсетіледі. Әртүрлі қанша билет басып шығаруға болады? Ал тек А бекетінен Б бекетіне қарай бағыттағы билеттерді қарастырсақ ше?

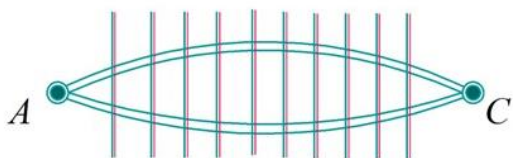
Есеп 4.7. Жиырма бұрышты көпбұрышта қанша диагональ бар? Ал 27 диагоналі бар көпбұрыштың қанша төбесі болады?

Есеп 4.8. Бесеуі бір түзудің бойында орналасқан, ал қалғандарынан ешбір үшеуі бір түзу бойында жатпайтын 15 нүкте жазықтықта орналасқан. Әрбір екі нүкте арқылы түзу жүргізіледі, бұндай түзулер саны қанша?

Есеп 4.9. Кәсіпорын бір мамандық бойынша 4 әйел адамға, екінші мамандық бойынша 5 ер адамға және үшінші мамандық бойынша кез келген адамға (жынысына байланыссыз) жұмыс орнын ұсынып отыр. Егер 9 әйел адам және 10 ер адам үміткер ретінде келсе, оларға жұмыс орындарын неше тәсілмен беруге болады?

Есеп 4.10. Алымы мен бөлімі бірдей болмайтын 3, 5, 7, 11, 13, 17 сандарынан қанша бөлшек құруға болады? Олардың ішінде нешеуі дұрыс, нешеуі бұрыс бөлшектер болады?

Есеп 4.11. Семей мен Ақтөбе арасын 10 соқпақ жолмен бөлініп жатқан 2 тас жол жалғайды (4.2-сурет). Ақтөбеден Семейге дейін бір жолды екі рет жүрмей және кері бағытқа ауыспай жолаушы неше тәсілмен бара алады? Ақтөбеден Семейге қарай шыққан жолаушының жолдың ешбір бөлігін кері қарай өтпегені белгілі болса, неше түрлі жолмен Семейге жете алады?



4.2-сурет

Есеп 4.12. 12 қабатты үйдің лифтісіне 3 адам отырды. Әрқайсысы бір-біріне тәуелсіз 2-қабаттан бастап кез келген қабатта шыға алады.

а) Адамдар қанша әдіспен бірдей қабаттан шыға алады?

б) Екі адам бірдей қабаттан, ал үшіншісі басқа қабаттан шыға алады?

с) Барлығы әртүрлі қабаттардан шығады?

Есеп 4.13. Христиан Гюйгенс Сатурн сақинасын ашқанда өз жолдастарына

$7 - a, 5 - c, 1 - d, 5 - e, 1 - g, 1 - h, 7 - i, 3 - l, 2 - m, 9 - n, 4 - o, 2 - p, 1 - q, 2 - r, 1 - s, 5 - t, 5 - u$
 әріптерінен құралған 61 әріпті анаграмма жіберді. Ол әріптерден "Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente ad eclipticam inclinato" (жұқа, жалпақ, еш жерде бүгілмеген, эклиптикаға ойысқан сақинамен қоршалған) сөйлемін құрауға болады. Гюйгенстің осы сөйлемін анықтау барысында осы әріптерден бос орын қалдырмай, тыныс белгілерін қолданбай қанша түрлі комбинация құрастыруға болатындығын көрсетіңіз.