

Тақырыбы: Ықтималдықтар теориясындағы өлшемдер теориясы

Мысал 3.1. $A = \{(a, +\infty): a \in (-\infty, \infty)\}$ жиындар жүйесі бірігу және қиылысу амалдарына қарағанда тұйық, ал айырма амалын алуға қатысты тұйық болмайтындығын дәлелдеңіз.

Шешуі. b, c нақты сандарын алайық, онда $(b, +\infty) \cup (c, +\infty) = (\min\{b, c\}, +\infty) \in A$ және $(b, +\infty) \cap (c, +\infty) = (\max\{b, c\}, +\infty) \in A$. b және c сандарына нақты болуынан басқа ешқандай шарт қойылмағандықтан, A жиындар жүйесінде жататын кез келген екі жиынның бірігуі мен қиылысуы осы жиындар жүйесінде жататындығы дәлелденді. Енді айырма амалына қарағанда тұйық болмайтындығын көрсетейік. Ол үшін A жиындар жүйесінің айырмасы осы жиындар жүйесінде жатпайтындай екі жиынын көрсетсек жеткілікті. Мысалы, $a, b \in (-\infty, \infty), a < b$ үшін $(a, +\infty) \setminus (b, +\infty) = (a, b]$ жиыны A жиындар жүйесінде жатпайды.

Мысал 3.2. $S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ жиындар жүйесі қиылысу амалына қарағанда тұйық болатындығын дәлелдеңіз.

Шешуі. 3.2-анықтамасына сәйкес S жиындар жүйесінде жататын кез келген A және B жиындары үшін олардың $A \cap B$ қиылысуы да S жиындар жүйесінде жататындығын дәлелдеу қажет.

$A \in S, B \in S$ алайық. Егер $A = B$ болса, онда $A \cap B = A \cap A = A \in S$.

Енді $A \neq B$ жағдайын қарастырайық, бұндай жағдайлар саны 6 (есептелуі IV тараудағы теру анықтамасына сәйкес жүргізіледі):

$A = \emptyset, B = \{a\} \in S$ болсын, онда $A \cap B = \emptyset \cap \{a\} = \emptyset \in S$,

$A = \emptyset, B = \{b\} \in S$ болсын, онда $A \cap B = \emptyset \cap \{b\} = \emptyset \in S$,

$A = \emptyset, B = \{a, b\} \in S$ болсын, онда $A \cap B = \emptyset \cap$

$\{a, b\} = \emptyset \in S$,
 $A = \{a\}, B = \{b\} \in S$ болсын, онда $A \cap B = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in S$,
 $A = \{a\}, B = \{a, b\} \in S$ болсын, онда $A \cap B = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in S$,
 $A = \{b\}, B = \{a, b\} \in S$ болсын, онда $A \cap B = \{b\} \cap \{a, b\} = \{b\} \in S$.

Мысал 3.3. Ω жиыны берілсін. Не A , не $\Omega \setminus A$ ақырлы болатын Ω жиынының жиыншаларынан тұратын жиындар жүйесі F алгебра болатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. 3.1 теоремасына сәйкес F жиындар жүйесінің 1–3 шарттарын қанағаттандыратындығын дәлелдесек жеткілікті.

Бос жиында шексіз көп элемент болмағандықтан $\emptyset$ ақырлы болып, шарт бойынша $\emptyset \in F$. Енді $A \in F$ болсын, яғни не A , не $\Omega \setminus A$ ақырлы. Онда $\bar{A}$ жиыны үшін $\bar{A} = \Omega \setminus A$, және $\Omega \setminus \bar{A} = A$ болғандықтан, екеуінің бірі ақырлы болады. Олай болса $\bar{A} \in F$. Сонымен, 1- және 2-шарттары дәлелденді. Енді 3-шартты дәлелдейік. $A \in F, B \in F$ болсын. Онда F жиындар жүйесінің анықтамасына сәйкес келесі төрт жағдайдың бірі орындалады.

1-жағдай: A ақырлы, B ақырлы, онда $A \cup B$ ақырлы, демек $A \cup B \in F$.

2-жағдай: A ақырлы, $\bar{B}$ ақырлы болсын. Онда $\bar{A} \cap \bar{B}$ ақырлы болып $\bar{A} \cap \bar{B} \in F$ кірістіруі орындалады. Дәлелденген 2-шарт бойынша $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B$ жиыны да F жүйесінде жатады.

3-жағдай: $\bar{A}$ – ақырлы, B – ақырлы жағдайы дәл 2-жағдайдағыдай дәлелденеді.

4-жағдай: $\bar{A}$ – ақырлы, $\bar{B}$ – ақырлы. Онда $\bar{A} \cap \bar{B}$ жиыны да ақырлы болып, F алгебрасында жатады, онда 2-шарт бойынша қажетті $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \in F$ кірістіруін аламыз.

Мысал 3.4. Кез келген саналымды жиынның Лебег

өлшемі 0 санына тең екенін дәлелдеңіз.

Шешуі. A саналымды жиыны берілсін, онда оның элементтерін нөмірлеп шығуға болады: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$. k оң бүтін саны үшін бір элементті $\{a_k\}$ жиынын алайық.

$\{a_k\}$ тұйық және $[a_k, a_k]$ сегментіне тең, демек оның жиыншасы болғандықтан

$$m(\{a_k\}) = a_k - a_k - m(C_{[a_k, a_k]}\{a_k\}) = a_k - a_k - m(\emptyset) = 0.$$

Ары қарай, сыртқы өлшемнің жартылай аддитивтілігінен

$$0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) = \mu^*(\{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(\{a_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0,$$

яғни A жиынының сыртқы өлшемі, сонымен бірге ішкі өлшемі 0 санына тең болады. Демек A жиыны Лебег өлшемі 0-ге тең жиын болады.

Мысал 3.5. $\Omega = \{0,1\}$ жиынында өлшем анықтаңыз.

Шешуі. Ω жиынының барлық жиыншаларынан тұратын алгебра құрайық

$$A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}.$$

Теріс емес p және q сандарын алайық. μ өлшемінің $\{0\}$ және $\{1\}$ элементтеріндегі мәндерін келесідей анықтайық

$$\mu(\{0\}) = p, \quad \mu(\{1\}) = q.$$

$\{0,1\}$ элементіндегі мәні өлшемнің ақырлы аддитивтілігі бойынша

$$\mu(\{0,1\}) = \mu(\{0\}) + \mu(\{1\}) = p + q, \mu(\emptyset) = 0.$$

Ары қарай, 3.2 ескертуіне сәйкес

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

Сонда өлшем

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{егер } A = \emptyset, \\ p, & \text{егер } A = \{0\}, \\ q, & \text{егер } A = \{1\}, \\ p + q, & \text{егер } A = \{0,1\} \end{cases}$$

түрінде анықталады.

Мысал 3.6. Лебег бойынша өлшемді емес жиынның мысалын құрыңыз.

Шешуі. $[0,1]$ жиын алып, оның әрбір x элементіне $K_x = \{x + r: r \in Q\} \cap [0,1]$ жиынын сәйкес қою арқылы $[0,1]$ сегментін класстарға бөлейік. Бұдан бір класста айырмасы рационал сан болатын элементтер ғана жататындығын көреміз. Шынымен де, y және z элементтері K_x жиынында жатсын. Онда K_x жиынының анықтамасы бойынша белгілі бір r_y және r_z рационал сандары үшін $y = x + r_y$, $z = x + r_z$ теңдіктері орындалады. Бұдан $y - z = x + r_y - (x + r_z) = r_y - r_z \in Q$ көреміз.

Әрбір y және z сандары үшін оларға сәйкес келетін K_y және K_z жиындары не қиылыспайды, не қиылысса, онда олар беттеседі. Шынымен де, егер K_y және K_z жиындары қиылысса, онда $K_y \cap K_z \neq \emptyset$ болып, $t \in K_y \cap K_z$ шартын қанағаттандыратын t элементі табылады. Қиылысу амалының анықтамасы бойынша бір уақытта $t \in K_y$ және $t \in K_z$ кірістірулері орындалып, K_y және K_z жиындарының анықтамасы бойынша $t = y + r_{t,y}$, $t = z + r_{t,z}$ теңдіктері орындалатындай $r_{t,y}$, $r_{t,z}$ рационал сандары табылады. Бұдан

$$t = y + r_{t,y} = z + r_{t,z} \quad (3.1)$$

теңдігін аламыз.

K_y және K_z жиындарының теңдігін көрсетейік, ол үшін анықтама бойынша $K_y \subset K_z$ және $K_z \subset K_y$ кірістірулерінің бір уақытта орындалатындығын көрсетуіміз қажет.

Алдымен, $K_y \subset K_z$ жағдайын қарастырайық. $l \in K_y$ болсын. Онда $l = y + r_{l,y}$ теңдігі орындалатындай $r_{l,y}$ рационал саны табылады. (3.1) бойынша

$$l = y + r_{l,y} = z + (r_{t,z} - r_{t,y} + r_{l,y})$$

теңдігінен K_z жиынының анықтамасы бойынша $l \in K_z$ кірістіруін аламыз. Ал l санына K_y жиынында жатуынан басқа ешқандай шарт қойылмағандықтан l саны K_y жиынының кез келген элементі. Демек

$$\forall l \in K_y: l \in K_z,$$

бұдан $K_y \subset K_z$ кірістіруін аламыз. Осы тәрізді $K_z \subset K_y$ кірістіруін дәлелдеуге болады.

Беттесетін класстардан тек біреуін алып, $[0, 1]$ жиынын өзара қиылыспайтын класстарға бөлеміз.

Енді $[0,1]$ жиынының Лебег бойынша өлшемді емес жиыншасын құрайық. Әрбір класстан бір элементтен алып, осы элементтер жиынын A арқылы белгілейік. A жиыны өлшемді емес жиынның мысалын беретіндігіне көз жеткізейік.

A жиынының өлшемсіздігін оның сыртқы және ішкі өлшемдерінің тең еместігі арқылы көрсетейік. α және β арқылы A жиынының ішкі және сыртқы өлшемдерін белгілейік, яғни $\mu_*(A) = \alpha, \mu^*(A) = \beta$.

Алдымен A жиынының сыртқы өлшемін табайық. Дәлірек айтқанда, A жиынының сыртқы өлшемі 0 санынан артық екендігін көрсетеміз.

$[-2,2]$ сегментінде жататын барлық рационал

сандар жиыны саналымды болғандықтан оларды тізбек түрінде жазуға болады

$$r_0 = 0; r_1; r_2; \dots$$

Әрбір теріс емес k бүтін саны үшін

$$A_k = \{x + r_k : x \in A\}$$

жиынын анықтайық. Сыртқы және ішкі өлшемдердің қасиеттері ([13, §5,9 теорема] қараңыз) бойынша әрбір теріс емес k бүтін саны үшін

$$\mu^*(A_k) = \mu^*(A), \mu_*(A_k) = \mu_*(A)$$

теңдіктері орындалады және ыңғайлық үшін келесі белгілеулерін енгізейік

$$\mu^*(A_k) = \mu^*(A) = \beta, \mu_*(A_k) = \mu_*(A) = \alpha.$$

$\beta > 0$ екендігін көрсетейік. $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, шынымен де, $x \in [0,1]$ болсын, онда x жоғарыда аталған класстардың бірінде жатады. Егер A жиынындағы бұл класстың мүшесі x_0 болса, онда $x - x_0$ жоғарыда көрсеткеніміз бойынша рационал сан болады да, $[-2,2]$ сегментінде жатады. Демек, белгілі бір теріс емес k бүтін саны үшін $x - x_0 = r_k$ теңдігі орындалып, $x \in A_k$. Сонымен, $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ кірістіруі орындалды. Сыртқы өлшемнің монотондылығы мен жартылай аддитивтігін қолданып (өлшем теориясынан қажетті қасиеттер мен анықтамаларды оқырман, мысалы, [13] оқулығынан қарай алады)

$$\begin{aligned} 1 = \mu^*([0,1]) &\leq \mu^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta \\ &= \beta + \beta + \dots \end{aligned}$$

яғни

$$1 \leq \beta + \beta + \dots,$$

ал бұл теңсіздік тек $\beta > 0$ болған жағдайда ғана орындалады. Сонымен, $\mu^*(A) = \mu^*(A_k) = \beta > 0$ көрсеттік.

Енді $\mu_* A = \alpha = 0$ екендігін көрсетейік. A_k жиындары өзара қиылыспайды (бұл тұжырымның дәлелдеуін оқырманның өзіне қалдырамыз). Әрбір теріс емес k бүтін саны үшін

$$A_k \subset [-2, 3]$$

кірістіруі орындалады. $x \in A_k$ болсын, онда A жиынында жататын белгілі бір x_0 элементі үшін $x = x_0 + r_k$ теңдігі орындалады. $x_0 \in A$ кірістіруінен $0 \leq x_0 \leq 1$ теңсіздіктері, ал $r_k \in [-2, 2]$ кірістіруінен $-2 \leq r_k \leq 2$ теңсіздіктері шығып, бұлардан $x = x_0 + r_k \in [-2, 3]$ кірістіруін аламыз. Сонымен, $A_k \subset [-2, 3]$ дәлелденді. Бұдан

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \subset [-2, 3]$$

кірістіруін аламыз. Ішкі өлшемнің монотондылығы мен жартылай аддитивтілігін қолданып,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_*(A_k) \leq \mu_* \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) \leq \mu_*([-2, 3]) \leq 5,$$

яғни

$$\alpha + \alpha + \dots \leq 5$$

теңсіздігін аламыз, ал бұл тек $\alpha = 0$ жағдайында ғана орындалады. Демек, $\mu_*(A) = \mu_*(A_k) = \alpha = 0$.

Сонымен,

$$\mu_*(A) = \alpha = 0 < \beta = \mu^*(A).$$

A жиынының сыртқы және ішкі өлшемдері тең емес, демек жиын Лебег бойынша өлшемді емес.

Мысал 3.7. $\Omega = [0,1]$ жиынының барлық жиыншаларынан құралған σF σ -алгебрада Лебег өлшемін құруға болмайтындығын көрсетіңіз.

Шешуі. Қарсы жорып, $\Omega = [0,1]$ жиынының барлық жиыншаларынан құралған $\sigma A = \{A: A \subset \Omega\}$ σ -алгебрада μ Лебег өлшемі болсын делік. Өлшем функция болғандықтан, анықтама бойынша, σA жиынының әрбір элементіне белгілі бір ереже бойынша теріс емес $\mu(A)$ санын сәйкес қояды. Дербес жағдайда 3.6 мысалынан алынған A жиыны үшін де, яғни белгілі бір $\alpha \in [0, +\infty]$ үшін $\mu(A) = \alpha$. Бұдан α саны A жиынының өлшемі, ал бұлай болуы мүмкін емес, оны 3.6-мысалдан A жиынының өлшемсіздігін дәлелдеу арқылы көрдік. Демек қайшылық, жорыымыз қате.

Тапсырмалар

Есеп 3.1. Бірігу және қиылысу амалдарына қарағанда тұйық, ал айырма амалына қарағанда тұйық болмайтын жиындар жүйесінің мысалын келтіріңіз.

Есеп 3.2. Ω жиыны берілсін. Оның барлық мүмкін жиыншаларынан құрылған жиындар жүйесінің σ -алгебра болатындығын дәлелдеңіз.

Есеп 3.3. A жиыны берілсін. Не C , не $A \setminus C$ ақырлы не саналымды болатын A жиынының C жиыншаларынан тұратын F жиындар жүйесі σ -алгебра болатынын дәлелдеңіз.

Есеп 3.4. Кез келген оң бүтін n саны үшін $p_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ шарттарын қанағаттандыратын $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегінің мысалын келтіріңіз.

Есеп 3.5. Тәжірибе жақтары 1-ден 4-ке дейінгі сандармен нөмірленген тетраэдрді лақтырудан тұрсын, осы тәжірибе үшін оқиғалар алгебрасын құрыңыз.

Есеп 3.6. Тәжірибе симметриялы тиынды 3 рет лақтырудан тұрсын. Ω - элементар оқиғалар жиыны. Келесі

a) $\{\emptyset, \Omega, \{CCC, CTC, CST, CTT\}, \{TCC, TTC, TCT, TTT\}\};$

б) $\{\emptyset, \Omega, \{CCC, CTC, TCT, TTT\}, \{TCC, TTC, TCT, TTT\}\}$
жиындар жүйесінің қайсысы алгебра болады?

Есеп 3.7. $A_1, A_2, \dots$ ақырлы жиындар тізбегі берілсін. $n = 1, 2, \dots$ үшін $B_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$ және $C_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j$ болсын. Онда

а) $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ және $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ көрсетіңіз;

б) $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ оқиғасы $A_1, A_2, \dots$ оқиғаларының кемінде біреуінің жиыншасы болғанда және тек сонда ғана оқиғалар алгебрасында жататындығын дәлелдеңіз;

с) $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ оқиғасы $A_1, A_2, \dots$ оқиғаларының барлығының жиыншасы болғанда және тек сонда ғана оқиғалар алгебрасында жататындығын көрсетіңіз.

Есеп 3.8. $A = \{[a, b): 0 \leq a \leq b \leq +\infty\}$ жиындар жүйесінің алгебра болмайтындығын дәлелдеңіз.

Есеп 3.9. Ω жиынының жиыншаларынан құралған σF сигма-алгебрада өлшем анықталсын. Өлшем анықтамасынан тікелей шығатын

а) Егер $A, B \in \sigma F, A \subset B$ болса, онда $\mu(A) \leq \mu(B)$;

б) Кез келген $A, B \in \sigma F$ үшін $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

қасиеттерді дәлелдеңіз.

Есеп 3.10. $\Omega = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ жиынының барлық жиыншаларынан құралған σ -алгебрада өлшем анықтаңыз.