

Тақырыбы. Оқиғаға қолданылатын амалдар

Мысал 2.1. Тәжірибе теңгені бір рет лақтырудан тұрсын. Барлық мүмкін элементар оқиғалар жиыны мен мүмкін оқиғаларды жазыңыз.

Шешуі. Алдыңғы сабақта 1.1-мысалынан көріп отырғанымыздай бұл тәжірибенің барлық мүмкін элементар оқиғалар жиыны – $\{\omega_1 = T, \omega_2 = C\}$ болатын екі элементті жиын, яғни ақырлы жиын, онда теория бөлімінде айтқанымыздай оның кез келген жиыншасы оқиға болады. Сонымен, $\{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$ жиынының кез келген элементі қарастырып отырған тәжірибесі үшін оқиға болып табылады.

Мысал 2.2. Тәжірибе қандай да бір құрылғының жұмыс істеу уақытын бақылаудан тұрсын. Элементар оқиғалар кеңістігі мен барлық мүмкін оқиғаларды жазыңыз.

Шешуі. Қарастырып отырған тәжірибенің барлық элементар оқиғалар жиыны континиум қуатты $[0, +\infty)$ шенелмеген аралығы болады, бұл саналымдыдан артық жиын. Нақты анализ теориясынан мұндай жиынның кез келген жиыншасы *өлшемді* (Лебег мағынасында) бола бермейтіндігі белгілі (мұндай жиынның мысалы III тарауда келтірілген). Сондықтан олардың ішінен тек өлшемді жиындар ғана оқиға болады.

$\{A: A \in [0, +\infty), A \text{ — өлшемді}\}$ – жүйесінің кез келген элементі қарастырып отырған тәжірибеде оқиға болып табылады.

Әрине, әр есеп үшін барлық мүмкін оқиғаларды тізіп жазу маңызды емес, тек қажеттілерін жазсақ та жеткілікті болып жатады.

Мысал 2.3. Нысанаға 3 рет оқ атылсын. A оқиғасы нысанаға ең болмағанда бір оқтың тиюі болсын, онда A оқиғасына қарама-қарсы $\bar{A}$ оқиғасын анықтаңыз.

Шешуі. Оқтың тиюін m – (тиді), тимеуін – $\bar{m}$ (тимеді) деп белгілейік, онда әр орында сәйкес ретте

атылған оқтың нәтижесін қоятын болсақ, элементар оқиғалар жиыны 8 элементтен тұратын

Ω

$$= \left\{ (t, t, t), (\bar{t}, t, t), (t, \bar{t}, t), (t, t, \bar{t}), (t, \bar{t}, \bar{t}), (\bar{t}, t, \bar{t}), (\bar{t}, \bar{t}, t), (\bar{t}, \bar{t}, \bar{t}) \right\}$$

жиыны болады.

Есеп шарты бойынша A оқиғасы нысанаға ең болмағанда бір оқтың тигенін, яғни нысанаға бір оқ тиді, екі оқ тиді немесе үш оқ тиді дегенді білдіреді, онда

$$A = \left\{ (\bar{t}, t, t), (t, \bar{t}, t), (t, t, \bar{t}), (t, \bar{t}, \bar{t}), (\bar{t}, t, \bar{t}), (\bar{t}, \bar{t}, t), (\bar{t}, \bar{t}, \bar{t}) \right\}.$$

Анықтама бойынша $\bar{A} = \Omega \setminus A$ болғандықтан A орындалмағанда орындалатын оқиға, үш оқтың да тимегенін білдіреді, яғни

$$\bar{A} = \{(\bar{t}, \bar{t}, \bar{t})\}.$$

Мысал 2.4. Жәшікте ақ, қара және қызыл шарлар бар, кездейсоқ бір шар алынды. A оқиғасы алынған шардың ақ болған жағдайда $\bar{A}$ оқиғасын анықтаңыз.

Шешуі. $\bar{A}$ оқиғасы A орындалмағанда орындалатын оқиға болғандықтан, $\bar{A}$ оқиғасы алынған шардың ақ емес болуын білдіреді, яғни алынған шар қара немесе қызыл түсті болады. Тікелей анықтамаға жүгінсек

$$\Omega = \{\omega_1 = \text{ақ}, \omega_2 = \text{қара}, \omega_3 = \text{қызыл}\},$$

$$A = \{\omega_1 = \text{ақ}\}$$

демек

$$\bar{A} = \Omega \setminus A = \{\omega_2 = \text{қара}, \omega_3 = \text{қызыл}\}.$$

Мысал 2.5. Кез келген A, B, C оқиғалары үшін төмендегі кірістіруді дәлелдеңіз

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C). \quad (2.1)$$

Шешуі. Егер $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ оқиғасы мүмкін емес оқиға болса, яғни $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \emptyset$ болса, онда берілген кірістіру бос жиын кез келген жиынның жиыншасы болғандықтан орындалады.

Енді $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ оқиғасы бос емес жиын болсын. $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ оқиғасында жататын ω элементар оқиғасын алайық (жиын бос емес болғандықтан ондай элемент бар), яғни $\omega \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ элементі табылады. Бұдан қиылысу амалының анықтамасы бойынша $\omega \in (A \setminus B)$ және $\omega \in (A \setminus C)$. Ал бұл $\omega \in A, \omega \notin B$ және $\omega \in A, \omega \notin C$ шарттарына парапар. Қиылысу амалының анықтамасы бойынша $\omega \in A$ және $\omega \notin (B \cup C)$ (егер $\omega \in B \cup C$ болса, онда $\omega \in B$ немесе $\omega \in C$, бұл ω алыну шартына кірістіруіне қайшы). Бұдан оқиғалар айырмасының анықтамасы бойынша $\omega \in A \setminus (B \cup C)$.

Ал ω элементар оқиғасы $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ оқиғасының бір жағынан бекітілген, екінші жағынан кез келген элементар оқиғасы болғандықтан (алған кезде жиынның бір ғана элементімен жұмыс жасаймыз, ал оған жиында жатуынан басқа ешқандай шарт қоймағандықтан ол жиынның кез келген элементі) $\omega \in A \setminus (B \cup C)$ кірістіруі кез келген $\omega \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ элементі үшін дәлелденді. Дәлелдеу керегі де осы еді.

Оқиғалар кірістіруін немесе теңдігін дәлелдеу барысында «және» сөзін "{" жақшасымен, «немесе» сөзін "[" жақшасымен ауыстыруға келісіп, дәлелдеуді келесі түрде өрнектеуге болады

$$\begin{aligned} \forall \omega: \omega \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega \in A \setminus B \\ \omega \in A \setminus C \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \omega \in A \\ \omega \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega \in A \\ \omega \notin B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \omega \in A \setminus (B \cup C). \end{aligned}$$

Ескерту 2.3. Дәлелдеуден көріп отырғанымыздай шын мәнінде (2.1) кірістіруі екі жақтан да орындалып,

теңдікке айналады. $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ кірістіруі де дұрыс.

Мысал 2.6. Жәшікте ақ, қызыл және қара шарлар бар. Одан кездейсоқ бір шар таңдап алынады. A оқиғасы алынған шардың ақ, B оқиғасы алынған шардың қызыл, C оқиғасы алынған шардың қара болуын білдірсін. $A \cup B, A \cap C, C \setminus B$ оқиғаларын анықтаңыз.

Шешуі. $A \cup B$ амалы анықтама бойынша не A оқиғасы, не B оқиғасы, не екі оқиға да бірге орындалатындығын білдіреді.

Демек, $A \cup B$ орындалуы нәтижесінде не ақ шар, не қызыл шар түседі (дәл осы есептің шарты бойынша екі нәтиже – қызыл және ақ шарлар қатар түсе алмайды).

$A \cap C$ амалы A және C оқиғалары бір уақытта орындалғанда орыдалады, ал жәшіктен бір шар алғанда оның бір уақытта ақ та, қара да болуы мүмкін емес, яғни $A \cap C = \emptyset$ мүмкін емес оқиға, яғни A және C оқиғалары үйлесімсіз.

$C \setminus B$ – C оқиғасының орындалып, B оқиғасы орындалмауын білдіреді, яғни алынған шар қызыл емес, қара.

Сонымен,

$$\Omega = \{\omega_1 = \text{ақ}, \omega_2 = \text{қызыл}, \omega_3 = \text{қара}\},$$

$$A = \{\omega_1 = \text{ақ}\}, B = \{\omega_2 = \text{қызыл}\}, C = \{\omega_3 = \text{қара}\}.$$

Онда

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\omega_1 = \text{ақ}, \omega_2 = \text{қызыл}\}, \\ A \cap C &= \emptyset, \\ C \setminus B &= \{\omega_3 = \text{қара}\}. \end{aligned}$$

Мысал 2.7. Ойын сүйегі бір рет лақтырылды. A оқиғасы түскен ұпай 3 санына еселі, B оқиғасы түскен ұпай жұп, C оқиғасы түскен ұпай 4 санынан үлкен, D оқиғасы түскен ұпай нақты сан, E оқиғасы түскен ұпай бүтін емес сан, F оқиғасы түскен ұпай 2,5 саны

мен 4,5 санының арасында жатыр деген оқиғалар болсын. Элементар оқиғалар жиыны мен берілген оқиғаларды анықтап, оларды үйлесімділікке тексеріңіз.

Шешуі. Барлық мүмкін элементар оқиғалар жиыны

$$\Omega = \{\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4, \omega_5 = 5, \omega_6 = 6\}.$$

Жоғарыда аталған оқиғаларды көрсетейік:

$$A = \{\omega_3 = 3, \omega_6 = 6\}, B = \{\omega_2 = 2, \omega_4 = 4, \omega_6 = 6\}, \\ C = \{\omega_5 = 5, \omega_6 = 6\},$$

$$D = \{\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4, \omega_5 = 5, \omega_6 = 6\}, E = \emptyset, \\ F = \{\omega_3 = 3, \omega_4 = 4\}.$$

Осы оқиғалардың қос-қостан үйлесімділігін анықтау үшін олардың өзара қиылысуларын тексерейік (анықтама бойынша қиылысуы бос оқиғалар үйлесімсіз деп аталған)

$$A \cap B = \{\omega_6 = 6\}, A \cap C = \{\omega_6 = 6\}, A \cap D = \{\omega_3 = 3, \omega_6 = 6\}, A \cap E = \emptyset,$$

$$A \cap F = \{\omega_3 = 3\},$$

$$B \cap C = \{\omega_6 = 6\}, B \cap D = \{\omega_2 = 2, \omega_4 = 4, \omega_6 = 6\}, B \cap E = \emptyset, B \cap F = \{\omega_4 = 4\},$$

$$C \cap D = \{\omega_5 = 5, \omega_6 = 6\}, C \cap E = \emptyset, C \cap F = \emptyset,$$

$$D \cap E = \emptyset, D \cap F = \{\omega_3 = 3, \omega_4 = 4\}, E \cap F = \emptyset.$$

Демек, A және E , B және E , C және E , C және F , D және E , E және F оқиғалары өзара үйлесімсіз, қалған жұптар үйлесімді.

Мысал 2.8. Эйлер-Венн диаграммалары арқылы A және B оқиғалары үшін $A \cap \bar{B}$ оқиғасын бейнелеңіз.

Шешуі. Алдымен A және B жиындарының барлық мүмкін өзара орналасу қатынастарын көрсетейік:

1-жағдай: $A \cap B = \emptyset$,

2-жағдай: $A \cap B \neq \emptyset$, ал бұл жағдайдың өзі келесі жағдайларға бөлінеді:

2.1-жағдай: $A \subset B, A \neq B$,

2.2-жағдай:

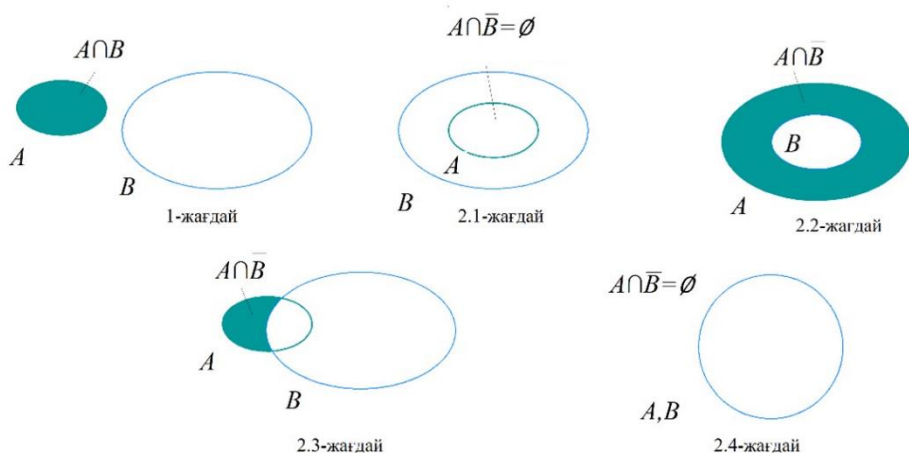
$B \subset A, B \neq A$,

2.3-жағдай:

$A \not\subset B, B \not\subset A$,

2.4-жағдай: $A = B$.

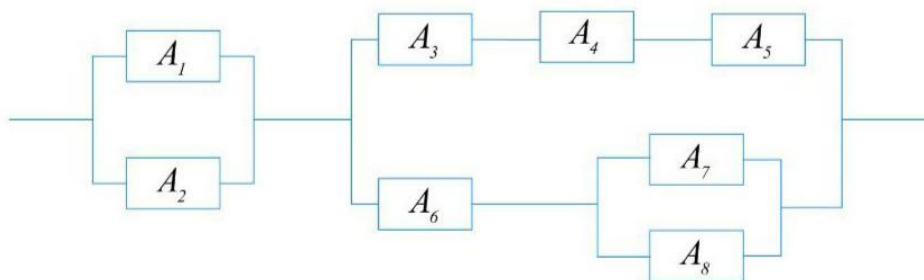
Осы жағдайлар үшін жеке-жеке $A \cap \bar{B}$ амалын орындайық. 1-жағдайда $A \cap \bar{B} = A$. 2.1-жағдайында $A \cap \bar{B} = \emptyset$. 2.2-жағдайында $A \cap \bar{B} = A \setminus B$. 2.3-жағдайында да $A \cap \bar{B} = A \setminus B$. 2.4-жағдайында $A \cap \bar{B} = \emptyset$. Және бұларға сәйкес Эйлер-Венн диаграммалары төменде көрсетілген (2.6-сурет).



2.6-сурет

Көріп отырғанымыздай, 2.1 мен 2.4 жағдайларында диаграммада боялған бөлік жоқ, себебі қарастырып отырған жиын бос жиын.

Мысал 2.9. 2.7-суретте белгілі бір құрылғының сызбасы көрсетілген. A және A_i оқиғалары сәйкесінше құрылғы мен оның i -ші ($i = 1, 2, \dots, 8$) бөлшегінің жұмыс жасауын білдірсін. A_i оқиғалары арқылы A және $\bar{A}$ оқиғаларын өрнектеңіз.



2.7-сурет

Шешуі. Жүйе жұмыс жасауы үшін тізбектей қосылған жүйе элементтерінің барлығы бір уақытта, ал параллель қосылғандарының кемінде біреуі жұмыс жасауы қажетті және жеткілікті. Сол себептен,

$$A = (A_1 \cup A_2) \cap \left((A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_6 \cap (A_7 \cup A_8)) \right).$$

Бұдан, Де Морган заңдарын (2.7-қасиетті қараңыз) қолдана отырып $\bar{A}$ оқиғасы үшін

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \overline{(A_1 \cup A_2) \cap \left((A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_6 \cap (A_7 \cup A_8)) \right)} = \\ &= (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup \left((\bar{A}_3 \cup \bar{A}_4 \cup \bar{A}_5) \cap (\bar{A}_6 \cup (\bar{A}_7 \cap \bar{A}_8)) \right). \end{aligned}$$

Тапсырмалар

Есеп 2.1. Егер $A \subset B$ болса, онда $\bar{B} \subset \bar{A}$ қатынасын дәлелдеңіз.

Есеп 2.2. Төмендегі оқиғалардың қайсысы жалған, қайсысы ақиқат, қайсысы екеуі де емес екендігін көрсетіңіз.

A – үш рет оқ атқанда екі оқтың тиюі (мерген әр атқанда 100 пайыз тигізе бермейтін жағдайда);

B – екі рет оқ атқанда кемінде бір оқтың тиюі;

C – үш ойын сүйегін лақтырғанда 18-ден артық емес ұпайдың түсуі;

D – кездейсоқ таңдап алынған үш таңбалы санның 1000-нан кем болуы;

E – кездейсоқ таңдап алынған үш таңбалы санның қайталанбайтын цифрлардан тұруы мен оның 400-ден кем болуы;

F – 1,2,3,7,8 цифрларынан 2 орынды кездейсоқ құралған санның 9 санына еселі болуы;

I – 1,3,7,9 цифрларынан кездейсоқ құралған санның 2 санына еселі болуы.

Есеп 2.3. Оқиғалардың қайсысының орындалуы келесісінің орындалуына алып келеді (жиыншасы болады)?

a) Тәжірибе нысанаға 5 оқ атудан тұрсын. *A* – Нысанаға бірінші атылған оқтың тиюі; *B* – атылған 5 оқтың кемінде біреуінің нысанаға тиюі; *C* – атылған 5 оқтың дәл біреуінің нысанаға тиюі.

b) Тәжірибе ойын сүйегін лақтырудан тұрсын. *A* – ойын сүйегін лақтырғанда 3 ұпай түсуі; *B* – ойын сүйегін лақтырғанда 3 ұпайдан артық емес ұпайдың түсуі; *C* – ойын сүйегін лақтырғанда 4 ұпайдан артық емес ұпайдың түсуі.

Есеп 2.4. *A, B, C* оқиғалары берілсін. Төмендегі оқиғаларды *A, B, C* оқиғалары арқылы өрнектеңіз

a) D_1 оқиғасы *A, B, C* оқиғаларының ең болмағанда екеуі орындалғанда орындалатын оқиға;

b) D_2 оқиғасы *A, B, C* оқиғаларының тек екеуі орындалғанда орындалатын оқиға;

c) D_3 оқиғасы *A, B, C* оқиғаларының ең болмағанда біреуі орындалғанда орындалатын оқиға;

- d) D_4 оқиғасы A, B, C оқиғаларының тек біреуі орындалғанда орындалатын оқиға;
e) D_5 оқиғасы A, B, C оқиғаларының көп дегенде екеуі орындалғанда орындалатын оқиға болсын.

Есеп 2.5. 1 санынан 10 санына дейін нөмірленген 10 көк және 1 санынан 10 санына дейін нөмірленген 10 қызыл картадан тұратын 20 картаның ішінен кездейсоқ бір карта таңдап алынды. A оқиғасы алынған карта жұп нөмірлі болуы, B оқиғасы көк картаның алынуы, C оқиғасы алынған картаның нөмірі 5 санынан кем болуы болса, барлық элементар оқиғалар жиыны мен осы оқиғаларды жазыңыз және

- a) $A \cap B \cap C$;
b) $B \cap \bar{C}$;
c) $A \cup B \cup C$;
d) $A \cap (B \cup C)$;
e) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

оқиғаларын анықтаңыз және мағынасын түсіндіріңіз.