

Дәріс 11. Графтағы алгоритмдер. Екі полюсті желілер. Желілердегі ағындар. Қысқа жолдар мен тізбектер.

8-Теорема. Граф байланысты болса ғана орман болатын суграф болады.

Орман болатын G суграфы қаңқалы ағаш немесе G суграфының қаңқасы деп аталады.

Ең аз қосылу туралы есеп. (Ең аз салмақты қаңқалы ағаш құру)

Жол тұрғызу есебі түрінде өрнектеуге болатын мына есептің практикалық мағынасы үлкен. Жолдар желісімен қосылуы қажет бірнеше қалалар болсын. Әр екі қаланы қосатын жолдың бағасы белгілі. Мүмкін болатын жолдар желісінің ең арзанын салу қажет болсын. (Жолдардың орнына электр желісін, мұнай құбыры желісі, т.б. алуға болады.

Ең арзан жолдар желісін кескіндейтін граф әрқашан ағаш болады. Себебі, егер цикл бар болса, циклдың бір қабырғасын алып тастауға болар еді, ал төбелер қосылған болып қала берер еді. Есептің математикалық қойылуы. Айталық, бағытталмаған $G(V, E)$, $|V|=n$, графының әр қабырғасына осы қабырғаның салмағы болып саналатын қандай да бір $\mu(e)$ нақты сан бекітілген болсын. G графында салмағы ең аз, ең кіші қосылу, яғни G графының T қаңқасын салу керек болсын.

$$\mu(T) = \sum_{e \in T} \mu(e).$$

Краскал алгоритмін қарастырайық (ең аз салмақты қаңқалы ағаш сызу). Сызу жұмысын салмағы $\mu(e_1)$ ең аз $e_1 \in E$ қабырғасын таңдаудан басталады. Егер мұндай қабырғалар бірнешеу болса, олардың кез келгенін алуға болады. Таңдалған қабырғаға $E \setminus \{e_1\}$ алынған ең аз салмақты e_2 қабырғасы e_3 ретінде цикл құрмайтын $E \setminus \{e_1, e_2\}$ деп алынған ең аз салмақты $E \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ таңдалады. Қабырға таңдау процесі кез келген қабырға қосу цикл пайда болуына әкеліп соққанға дейін жүргізіледі. Осы граф ең аз салмақты қаңқалы ағаш болып саналады.

Графтағы ең қысқа жолдар (арақашықтық). Айталық, G кез-келген граф, ал $x, y \in V(G)$ оның екі төбесі болсын. x -тен y апаратын маршрутты P_0 деп, ал ұз. P арқылы x пен y -ті қосатын кез келген маршруттың ұзындығын белгілейік. (ұз. Q арқылы Q маршрутының ұзындығы белгіленеді.).

Анықтама. Егер ұз. $P_0 \leq$ ұзындығы P болса P_0 маршруты ең қысқа маршрут деп аталады.

Ең қысқа жолда төбелер мен доғалар (қабырғалар) қайталанбайды. Шынында да, егер P_0 маршрутында $P_0: x=z, e_1, z_1, \dots, z_{p-1}, e_p, z_p=y$ $z_i=z_j$ бар болса, онда P_0 маршрутын z_i -ден z_j -ға дейінгі кесіндіні алып тастап қысқартуға болар еді, яғни P_0 -ді $x = z_0, e_1, \dots, e_i, z_i, e_{j+1}, \dots, z_{p-1}, e_p, z_p=y$ маршрутымен алмастырар едік. Сондықтан да шын мәнінде ең қысқа маршрут қарапайым шынжыр болады. «Ең қысқа жол», «Ең қысқа маршрут», «Ең қысқа шынжыр» терминдерінің мағынасы бірдей.

Айталық, $G=\langle M, R \rangle$ байланысқан бағытталмаған граф, ал a мен b оның әртүрлі төбелері болсын.

Анықтама. Ең қысқа (a, b) -маршруты a, b төбелерінің арақашықтығы деп аталады және $\rho(a, b)$ мен белгіленеді.

$\rho(a, b) = 0$ (анықтама бойынша арақашықтық 0-ге тең болсын). Бұлай анықталған арақашықтық метриканың төмендегідей аксиомаларын қанағаттандырады.

- $\rho(a, b) \geq 0$;
- $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
- $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ (симметриялық);
- $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, a)$ (үшбұрыш теңсіздігі)

Анықтама. Егер $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ төбелер жиыны болса, онда элементтері $P_{ij} = (p_{ij})$ арақашықтықтар арқылы анықталатын $p_{ij} = \rho(a_i, a_j)$ матрицасы арақашықтық матрицасы деп аталады. $P^T = P$, яғни P -симметриялы матрица.

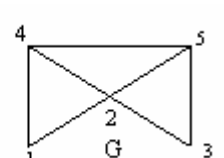
Анықтама. Тұрақты бір a төбесі үшін $e(a) \Leftrightarrow \max \{ \rho(a, b) \mid b \in M \}$ a төбесінің эксцентриситеті деп аталады. Яғни төбелердің эксцентриситеті осы төбемен одан ең алыс жатқан төбенің арақашықтығы.

Егер P арақашықтық матрицасы болса онда $e(a_i)$ эксцентриситеті i -ші жолда орналасқан сандардың ең үлкеніне тең. Төбелері эксцентриситеттерінің ішіндегі ең үлкені G графының диаметрі деп аталады және ол $d(G)$ болып белгіленеді; $d(G) = \max \{ e(a) \mid a \in M \}$

Анықтама. Егер $e(a) = d(G)$ болса a төбесі перифериядағы төбе деп аталады

Мысал :

Суреттегі G графының диаметрін табу керек.

Арақашықтық матрицасы $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$e(1) = 3;$ $e(2) = 2;$ $e(3) = 3;$ $e(4) = 2;$ $e(5) = 2;$	$d(G) = 3$ 1,3-перифериядағы төбелер болады.	
--	---	--	--

Анықтама. Эксцентриситеттердің ең кішісі графтың радиусы деп аталады $r(G)$ болып белгіленеді; $r(G) \Leftrightarrow \min \{ e(a) \mid a \in M \}$;

Анықтама. Егер $e(a) = r(G)$ a төбесі орталық төбе деп аталады. Барлық орталық төбелердің жиыны графтың центрі деп аталады. Мысалы, жоғарыдағы графтың радиусы 2-ге тең $r(G) = 2$, центрі $\{2, 4, 5\}$ жиыны болады.

Орталық төбелерді табу есебі іс жүзінде көптеп кездеседі. Мысалы граф – төбелері елді мекендер, қабырғалары олардың арасындағы жолдарды білдіретін – жолдар желісін өрнектейтін болсын. Ауруханаларды, қызмет көрсету пунктерін т.б. тиімді орналастыру керек. Тиімділік дегенді бұл жерде қызмет көрсететін пункттен неғұрлым алыс орналасқан елді мекендердің ара қашықтығын неғұрлым азайту болып табылады. Демек, графтың орталық төбелері больница, қызмет көрсету пункттерін орналастыратын орындар болып табылады. Нақтылы есептерде бұларға қоса елді мекендердің ара қашықтығын, жолға кететін уақыт, жол бағасын т.б. ескеруге тура келеді. Бұл параметрлерді ескеру үшін салмақталған графтар қолданылады. Айталық $G = \langle M, R \rangle$ әр (a, b) доғасының салмағы $\mu(a, b)$ нақты санына тең салмақтанған граф болсын.

Анықтама. $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ маршрутының салмағы деп $\mu = \sum_{i=1}^n \mu(a_i, a_{i+1})$ санын айтады. (a, b) - маршрутының салмақтарының ең кішісі a және b төбелерінің салмақтанған арақашықтығы деп аталады $\rho_\omega = (a, b)$ болып белгіленеді.

Анықтама. Салмағы $\rho_\omega = (a, b)$ арақашықтығына тең (a, b) маршруты салмақтанған G графындағы ең қысқа маршрут деп аталады.

Анықтама. a төбесінің салмақтанған эксцентриситеті деп $\max\{\rho_\omega = (a, b) \mid b \in M\}$ санын айтады, оны $e_\omega(a)$ деп белгілейді.

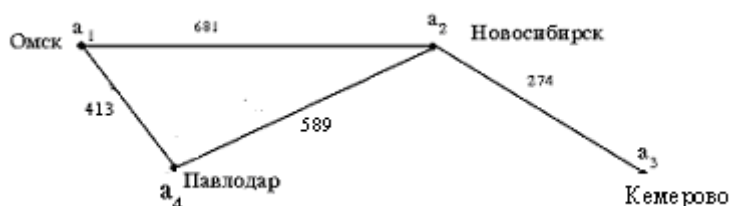
$$e_\omega(a) = \max\{\rho_\omega = (a, b) \mid b \in m\}$$

Анықтама. G графының салмақтанған орталық төбесі деп $e_\omega(a) = \min\{e_\omega(b) \mid b \in M\}$ a төбесін айтады.

Анықтама. Орталық төбенің салмақтанған эксцентриситеті G графының салмақтанған радиусы деп аталады, $r_\omega(G)$ болып белгіленеді.

Мысалы: Салмақтанған орталық төбе Новосибирск $e_\omega(a) = 274$, ал $r_\omega(G) = 681$

Графтағы ең қысқа маршрутты анықтайтын өте қарапайым әрі тиімді алгоритм бар.

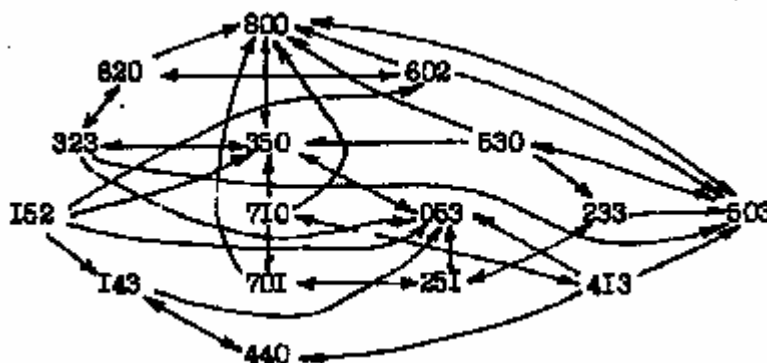


Оны бұрыннан белгілі бас қатырғыш жұмбақ есеп мысалында қарастырайық. Екі адамда вино құйылған 8 литрлік бір құмыра және 5 литрлік, 3 литрлік екі бос құмыра бар. Виноны құмыралар не толық, не бос болатындай құйып, екі адам барлық виноны тең бөлісуі керек.

Алдымен екі мүмкіндікті қарастырамыз: 8 литрлік құмырадан вино 5 литрлік және 3 литрлік құмыраларға құйылады. Бұл мүмкіндіктерді символдық түрде $800 \rightarrow 350$ және $800 \rightarrow 503$ деп белгілейік. Құмыраларға виноны құюдың әртүрлі мүмкіндіктерін (x, y, z) үштігімен немесе қысқаша xuz деп белгілейміз. Мұндағы x – 8 литрлік құмырадағы вино, y – 5 литрлік құмырадағы вино және z – 3 литрлік құмыраға құйылатын вино. 350 жағдайында 3 түрлі құю мүмкіндігі бар: $350 \rightarrow 323$, $350 \rightarrow 053$, $350 \rightarrow 800$. Осындай ситуацияларға талдау жасай келе және құмыраларды түрліше толтыра отыра суретте көрсетілгендей бағытталған граф аламыз. Алынған графтың төбелері ретінде әртүрлі жағдайларды сипаттайтын үштіктер ал виноны түрліше құюлар доғаларға сәйкес келеді. Әрине, бұл графта еселі доғалар жоқ, яғни бұл диграф. Жалпы, ең қысқа маршрутты анықтау есептеріндегі графтарда ілгектер мен еселі қабырғалар (доға) жоқ деп алынады. 800 төбеден 440 төбесіне апаратын маршрут табылса есеп шешілді деп

есептейміз. Суреттен мұндай жол оңай табылатындығын көреміз: 800, 350, 323, 620, 152, 143, 440. Бұл жолға есептің шешімін беретін төмендегідей құюлар сәйкес келеді.

Вино 8 литрлік құмырадан 5 литрлік құмыраға толтырылады.



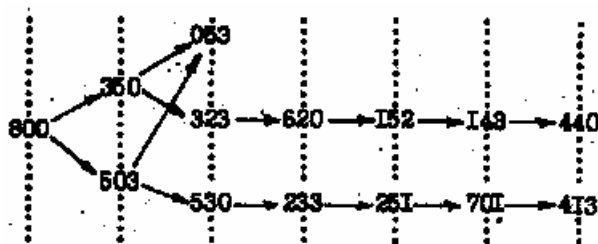
1-Сурет. Түрлі жағдайлар мен құюлар графы.

Содан кейін 5 литрлік құмырадан вино 3 литрлік құмыра толғанға дейін құйылады. 3 литрлік құмырадан вино түгелдей 8 литрлікке құйылады. 5 литрліктегі 2 литр 3 литрлікке құйылады. 8 литрліктегі 5 литрлікке толтырылады. 5 литрліктен 1 литрді 8 литрлік құмыраға құю керек (толғанға дейін). Соңында 3 литрліктен барлық виноны 8 литрлік құмыраға құйылады. Нәтижесінде 8 литрлік құмырада 4 литр вино және сонша литр 5 литрлік құмырада болады. Вино тең бөлінді.

Осы 800 төбеден 440 төбеге апаратын жол ең қысқа болады. Бұл жолды графтардағы ең қысқа маршрутты анықтайтын алгоритмді пайдаланып та табуға болады. Енді осы алгоритмнің жұмысын формальды түрде сипаттап көрейік:

Алгоритмнің жұмысы барысында $x_0=800$ алғашқы төбеден бірдей қашықтықтағы төбелер жиыны құрылады. Бұл жиындарды вертикаль түзулер яғни ярустарға (2 сурет) орналастырамыз (2-сурет). Нөлінші яруста бір ғана $x_0=800$ төбесі орналасқан. Бірінші яруста 800-ден шығатын доғалар кіретін төбелер орналасқан (350 және 503). Екінші ярусқа 350 және 503 төбелерге сыбайлас, бірақ 0-ші немесе 1-ші ярустарға кірмейтін төбелерді белгілейміз. Егер k -шы ярус құрылған болса $(k+1)$ -ярусқа G графының алдыңғы ярустарда жоқ және k -шы ярустағы төбелерге сыбайлас төбелерді енгіземіз. Ярус құру $y_0=440$ төбесі алынған сәтте тоқталады.

Осыдан кейін құрылған графтың $y_0=440$ төбесінен $x_0=800$ төбесіне қайту барысында маршрутты анықтаймыз. Бұл маршрутпен кері жүру барысында $x_0=800$ төбесінен $y_0=440$ төбесіне апаратын ең қысқа жол табылады.



2-сурет "Ярусты" граф

Біз ең қысқа жолды табу алгоритмін 1-суреттегі графқа қолданылатындай сипаттадық. Нақтылы бір мысалға жазылған бұл алгоритмді кез келген графқа қолдануға болатындай алгоритмнің сипаттамасын келтірейік: A11 алгоритмін графтың берілген екі төбесін қосатын ең қысқа маршрутын табу үшін сипаттаймыз. Бұл алгоритмнің негізіне берілген графтың бір төбесінен шығатын ең қысқа жолдардың графы деп қарастыруға болатын ярустық граф құру алгоритмі жатады. Сондықтан алдымен ең қысқа жолдардан құралған ішкі граф құратын A12 алгоритмін сипаттайық:

A12 алгоритмі (ең қысқа жолдар графын құрады).

Басы. Бағытталған G графы және оның бір $x_0 \in V(G)$ төбесі берілген. G графын кіретін және шығатын аймақтар $\{O^+(x), O^-(x) | x \in V(G)\}$ үйірімен берейік.

1. $L := \{x_0\}$, $M := \emptyset$, $\Gamma(x_0) := \emptyset$, $h(x_0) := 0$, $t := 0$;

Мұндағы L мәндері құрылғалы тұрған ағымдағы яруста жатқан төбелер жиыны болатын айнымалы; M -мәндері құрылғалы тұрған ағымдағы ярустың алдындағы яруста орналасқан төбелер жиыны болатын айнымалы; Γ әрбір x төбесіне құрылатын графтың x -ке апаратын төбелер жиынын белгілейтін функция; h x_0 төбесінен x төбесіне дейінгі аралықты көрсететін натурал санды кез келген x төбесіне белгілейтін функция; t - h функциясын есептеуге қолданылатын бүтін мәнді айнымалы t .

2. $M := MUL$;

3. Әрбір $z \in L$, $t := t + 1$; $L := \cup \{O^-(x) | x \in L\} \setminus M$, $\Gamma(z) := O^+(z) \cap M$, $\Gamma(z) := t + 1$;

4. Тексеру: $L = \emptyset$. Егер дұрыс болса 2 пунктке көш.

Соңы. M , h және Γ баспаға бер.

Мұнда M x_0 төбесінен шығатын ең қысқа жолдар графының төбелер жиыны; $\Gamma(x)$ ең қысқа жолдар графынан шығатын x төбесінің аймағы.

$h(x)$ — G графындағы $\rho(x_0, x)$ арақашықтығы (x пен y төбесінің арақашықтығы деп x пен y -ті қосатын ең қысқа жолды айтады).

1-кесте

X	800	350	503	053	323	530	620	233	602	251	152	701	143	710	440	413
Γ		800	800	350	350	503	323	530	620	233	602	251	152	701	143	710
H	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7

A12 алгоритмін x_0 -800 төбесімен G басқатырғыш графына қолданғанда 26 кадам жүргізіледі, оған қоса M айнымалысының ең соңғы мәні Γ және h функцияларының мәндерімен берілген 1-кестеде көрсетілген жиын болады. 1-кестеде шын мәнінде x_0 -800 төбесінен шығатын ең қысқа жолдар графы көрсетілген. ($\Gamma(x)$ бұл графта x төбесінің кір етін аймағы).

x_0 төбесінен y_0 төбесіне жеткізетін ең қысқа жолды табу үшін кестеден $\Gamma(y_0)$ мәнін табамыз және одан қандай да бір $y_1 \in \Gamma(y_0)$ төбесін аламыз. y_1 төбесі үшін $\Gamma(y_1)$ мәнін табамыз да, одан қандай да бір $y_2 \in \Gamma(y_1)$ төбесін аламыз. Осылай жалғастыра келе x_0 төбесіне келеміз (бұл төбе үшін $\Gamma(x_0)=0$). Мысалы, $y_0=440$ алсақ мынадай тізбек аламыз: $y_0=440$, $y_1=143 \in \Gamma(440)$, $y_2=152 \in \Gamma(143)$, $y_3=602 \in \Gamma(143)$, $y_4=620 \in \Gamma(602)$, $y_5=323 \in \Gamma(620)$, $y_6=350 \in \Gamma(323)$, $y_7=800$,

$\Gamma(800)=0$. Демек, 800 төбесінен 440 төбесіне жеткізетін ең қысқа маршрут: 800, 350, 323, 620, 602, 152, 143, 440.

Графтың екі төбесінің арасындағы ең қысқа жолды анықтайтын A11 алгоритмін A12 алгоритмінен жеңіл шығарып алуға болады.

A11 алгоритмі (графтың екі төбесінің арасындағы ең қысқа жолды анықтайды)

Басы. G бағытталған граф, x_0, y_0 оның екі төбесі

A12 алгоритмін (G, x_0) жұбына қолдану.

$y:=y_0, u:=y_0$.

Мұнда құрылып жатқан ең қысқа жолдың ағымдағы төбесі y -тің мәні болады.

$\Gamma(y)$ табу және $\Gamma(y)=0$ екендігін тексеру. Егер шарт дұрыс болса, « x_0 -ден y_0 -ге апаратын жол жоқ» деген хабар баспаға шықсын.

$x_0 \in \Gamma(y)$. екендігін тексеру. Егер дұрыс болса, соңына көш.

Қандай да бір $z \in \Gamma(y)$ төбесін алу. Анық болу үшін $\Gamma(y)$ тізіміндегі бірінші төбені аламыз да $y:=z$ және $u:=z, u$ 3 қадамға көш.

Мұндағы z, u z -ті u тізбегінің басына қосқандағы нәтижені білдіреді.

Соңы. U тізбегін баспаға шығару.

Бақылау сұрақтары:

1. Маршруттың, шынжырдың, қарапайым шынжырдың, тұйық маршруттың, циклдың, қарапайым циклдың анықтамаларын беріңіз.

2. Маршрут ұзындығы не?

3. Қандай граф байланысты деп аталады?

4. Граф төбелерінің арасындағы ұзындығы k -ға тең маршруттың бар екендігін қалай анықтауға болады?

5. Графтың екі төбесін қосатын ең қысқа жолды табудың алгоритмі.