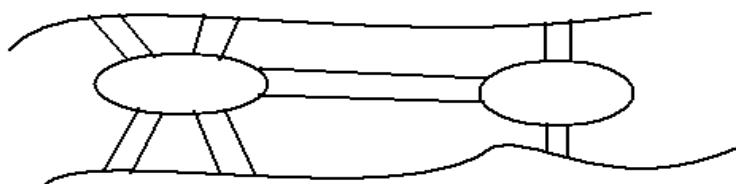


10–дәріс тақырыбы. Тізбектер. Циклдар. Байланыстылық. Ағаштар. Эйлер (жүп) бағандары. Цикломатикалық сан.

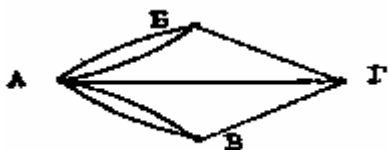
Дәріс конспектісі: Графтар теориясына негіз болған есептердің бірі Кенигсберг көпірлері туралы есеп. 1-Суретте Леонард Эйлердің тұсындағы(17 ғасыр) XVII ғасырдағы Кенигсберг қаласының картасы салынған. Қала Прегель өзенінің екі жақ жағалауында және 2 аралда. орналасқан Аралдар өзара және жағалаулармен 7 көпірмен жалғасқан. Кенигсберг тұрғындарының арасында сол кезде Кенигсберг көпірлері деп аталатын есеп кең тараған:

Есеп. Үйден шығып әр көпірмен бір рет қана жүріп үйге қайтып келуге бола ма деген сұрақ туады?



3-сурет

Бұл есеп үшін көпірлерден өтудің маңызы бар. Сондықтан көпірлердің орналасуын 2-суреттегі бағытталмаған мультиграфпен алмастыруға болады. Бұл графта Б, В төбелері өзеннің жағаларына, ал А, Г төбелері аралдар, ал мультиграфтың қабырғалары көпірлерге сәйкес келеді. Егер G графында оның барлық қабырғалары арқылы өтетін цикл табылса Кенигсберг туралы есеп шешілді деп есептеледі (Цикл деп бірде бір қабырға қайталанбайтын циклды маршрутты айтатынын еске саламыз). Демек графтар тілінде есептің қойылуы төмендегідей: Мультиграфта оның барлық қабырғалары болатындай цикл бар ма? Атақты ғалым-математик Л. Эйлер байланысты, бағытталмаған мультиграфта оның барлық қабырғалары болатындай цикл болудың шартын анықтап дәлелдеп берді.



4-сурет

Ағаштар, ағаштардың негізгі қасиеттері. Шектеулі бағытталмаған байланысты граф ағаш деп, ал циклсыз байланыссыз граф орман деп аталады. Анықтама бола алатындай G ағашының кейбір қасиеттерін қарастырамыз:

- а) G байланысты және циклы жоқ;
- б) G циклы жоқ және $n-1$ қабырғасы бар;
- в) G байланысты және $n-1$ қабырғасы бар;
- г) G графында цикл жоқ, бірақ сыбайлас емес төбелер арасында қабырға қосу тек бір ғана циклдың пайда болуына әкеледі;
- д) G байланысты, бірақ бұл қасиетін кез келген қабырға алынып тасталса жоғалтады;

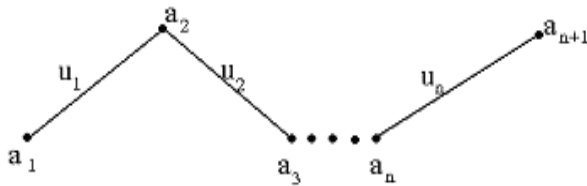
е) G графының кез келген төбелер жұбы тек бір ғана шынжырмен байланысқан.

Егер графтың кез келген 2 төбесін қосатын маршрут бар болса, граф байланысты (мықты байланысты) деп аталады, ондай маршрут болмаса ол байланыспаған граф болады.

Маршруттар. Айталық $G = \langle M, R \rangle$ n -граф болсын.

Мұндағы $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in M$ $U_1 U_2, \dots, U_n \in R$

Анықтама: Егер $U_i = (a_i, a_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n$ (екі көрші төбені қосатын қабырға) болса $a_1, U_1, a_2, U_2, a_3, \dots, U_n, a_{n+1}$ (*) маршрут деп аталады.



a_1 -төбесі маршруттың басы, a_{n+1} -соңы болады. (*) Маршрутты төбелердің тізбегі арқылы беруге болады. Маршрут доғаларының саны оның ұзындығы деп аталады. Айталық, G n -граф болсын. Егер (*) маршрутта қабырғалар $[a_1 a_2], \dots, [a_n a_{n+1}]$ әртүрлі болса, яғни әр қабырға бірден артық кездеспесе, маршрут шынжыр деп аталады, ал графтың кез келген төбесі 2-ден артық емес қабырғаға инцидентті болса (төбелер әртүрлі), онда маршрут қарапайым шынжыр деп аталады.

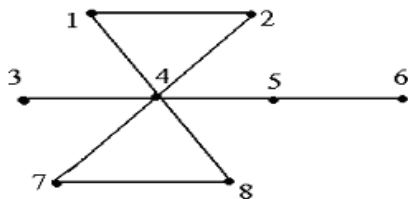
Анықтама. Егер $a_1 = a_{n+1}$ болса (*) маршруты циклды деп аталады (басы мен соңы бірдей маршрут).

Анықтама. Циклы бар маршрут шынжыр болса цикл деп аталады, ал маршрут қарапайым шынжыр болса қарапайым цикл деп аталады.

Анықтама. Бағытталмаған циклсыз граф ациклды граф деп аталады. Бағытталмаған графтың циклдарының ұзындықтарының ең кішісі құлаш деп аталады (обхват).

Бұл графта $(1, 2), (1, 2, 4, 7), (3, 4, 5, 6)$ -қарапайым шынжыр. $(1, 2, 4, 7, 8, 4)$ - қарапайым емес шынжыр (4-екі рет). $(1, 2, 4, 7, 8, 4, 2)$ —шынжыр емес маршрут; $(1, 2, 4, 7, 8, 4, 1)$ —қарапайым емес цикл;

$(1, 2, 4, 1)$ —қарапайым цикл; Графтың құлашы 3-ке тең. Айталық граф бағытталған болсын. Егер (*) маршруттарындағы доғалар әртүрлі болса, маршрут жол деп аталады. Егер $a_1 = a_{n+1}$ болса маршрут контур деп аталады. Контур жоқ графтар контурсыз граф деп аталады.

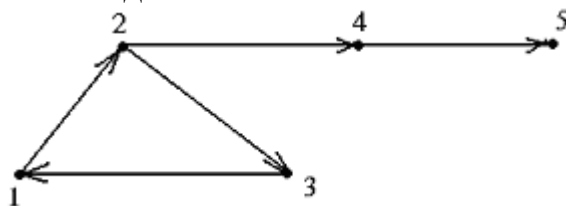


Маршруттың (жолдың) қабырғаларынаң (доғаларының) саны оның ұзындығы деп аталады.

Анықтама. Егер (a, b) жолы бар болса, онда b төбесі a дан жекізетін (достижимый) төбе деп аталады.

Мысал: Контур бар $(1,2,3)$.

5-төбеге басқа кез-келген төбеден жетуге болады, ал 5-тен ешқандай басқа төбе жеткізбейді.



Графтың байланыс компоненттері.

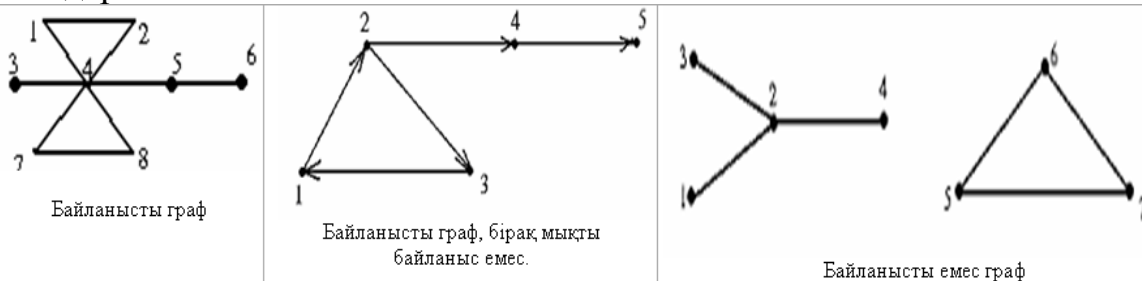
Анықтама. Бірдей емес екі төбесі $(v_1, v_{i1}) \in G$ маршрутпен қосылған (v_1 - басы, v_{i1} - соңы) бағытталмаған G графы байланысты граф деп аталады.

Анықтама: Егер бағытталмаған G графының әртүрлі a, v төбелері үшін (a, v) және (v, a) маршруттары бар болса, онда G мықты байланысқан граф деп аталады.



Мұндай ұғымды мультиграф үшін де енгізуге болады.

Мысалдар:

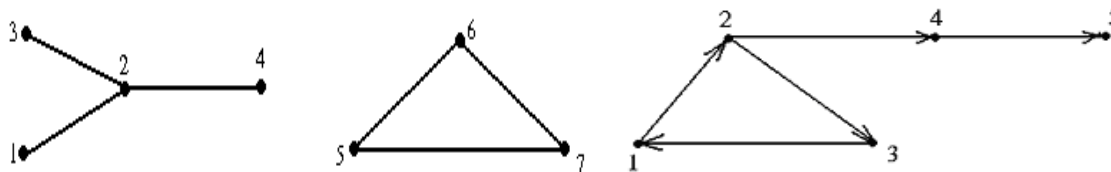


Кез келген байланысты бағытталмаған графтар мықты байланысқан граф екендігін байқауға болады.

Маршрутпен байланысты төбелер қарапайым шынжыр мен де байланысқан болады.

Байланыстылық қатынастың эквиваленттік қасиеті бар және ол граф төбелерін өзара қиылыспайтын $V_i, i=1, 2, \dots, k$ ішкі жиындарға бөлінуін анықтайды. Сондықтан барлық ішкі графтар $G(V_i)$ байланысқан және олар графтың байланыс компоненттері деп аталады. Бағытталған G графы доғалардың бағыты ескерілмесе байланысқан делінеді, ал егер кез келген V^1 төбесінен V^{11} төбесіне жол болса мықты байланысқан болады.

Мысалы, мына суреттегі графта екі $\{1, 2, 3, 4\}$ және $\{5, 6, 7\}$ байланыс компоненттері бар. Ал мына төмендегі суреттегі бағытталған графта $\{1, 2, 3\}, \{4\}$ және $\{5\}$ төбелерімен берілген 3 мықты компоненттері бар.



Теорема. Кез келген графты қиылыспайтын байланыс компоненттерінің бірігуімен өрнектеуге болады. Графтың байланыс компоненттеріне жіктелуі бір мәнді анықталады. $G = \bigcup_i G(V_i)$

Сонымен, төбелердің байланысты компоненттері мен мықты компоненттер жиыны төбелер жиындарын бөлшектейді, ал байл. компоненттерінің саны бір мәнді анықталады.

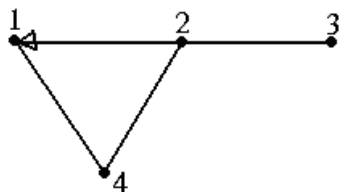
Келесі теорема сыбайлас A_G матрицасы бойынша G графының маршруттарын зерттеуге мүмкіндік береді.

Теорема. Егер A_G - G графының іргелестік матрицасы болса, онда $A_G^k = A_G \cdot A_G \cdot \dots \cdot A_G$ матрицасының (i, j) -ші элементі ұзындығы k -ға тең (a_i, j) -маршруттарының санын анықтайды.

Салдар. $A_G + A_G^2 + \dots + A_G^{n-1}$ матрицасының (i, j) -ші элементі 0-ге тең болмаса ғана n қуатты G графында a_i төбесі ішінде болатын (a_i, a_j) - маршрут ($a_i \neq a_j$) бар.

Мысалы. Сыбайлас A_G матрицаның көмегімен G графында $(1, 3)$ маршрутының бар екендігін анықтаймыз.

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$(1, 3)$ - элемент 0-ге тең, демек ұзындығы 1-ге тең маршрут жоқ

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$(1, 3)$ -элемент тағыда 0-ге тең. Ұзындығы 2-ге тең $(1, 3)$ -маршруты жоқ
Ұзындығы 3-ке тең $(1, 3)$ -маршруттың саны 1-ге тең

$$A_G^2 \cdot A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Графтың суретінен бұл маршрут $(1, 4, 2, 3)$ төбелерімен анықталады. Бұл тізбекті іргелестік матрицаны көбейту арқылы алуға болады: A_G^3 матр-ң $(1, 3)$ элементі A_G^2 матр-ң $(1, 2)$ элементімен A_G матрицаның $(2, 3)$ элементін көбейткеннен алынады.

Өз кезегінде A_G^2 м-ң (1, 2) элементі A_G матрицаның (1, 4) эл-н A_G (4,2)-ге көбейткеннен алынды. Демек 1-ден 3-ке жылжи отыра үш қадамнан кейін (1, 4, 2, 3) маршруты алынады.

A_G^3 матриц-да (4, 2) элементі 3 ке тең, демек, ұзындығы 3 ке тең (4, 2)-маршрутының саны үшеу. Олар:(4, 1, 4, 2), (4, 2, 4, 2), (4, 2, 3, 2)

Граф төбелерінің арасында ұзындығы к-ға тең маршруттың (жол) бар жоғын анықтайтын алгоритмді қарастырайық:

Айталық, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ төбелері v_1, v_2, v_3, v_4 бағытталған G графының

сыбайлас матрицасы болсын. $A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ матрицасын

қарастырайық. Жалпы алғанда, $A_{ik} \wedge A_{kj} = 1$ орындалатындай k саны бар болса ғана $A_{ij}^{\otimes 2} = 1$ болады, басқаша айтқанда v_i төбесімен v_k төбесін және v_k төбесімен v_j төбелерін қосатын қабырға бар. Сондықтан v_i төбесінен v_j төбесіне апаратын ұзындығы 2-ге тең жол бар.

Теорема. Айталық, G төбелері $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ және сыбайлас A матрицасы берілген бағытталған граф болсын. v_i мен v_j төбелерінің арасында $A_{ij}^{\otimes k} = 1$. ($1 \leq k \leq n$) шарты орындалса ғана ұзындығы k –ға тең жол бар болады.

Теорема Байланысты бағытталмаған мультиграфтың әр төбесінің дәрежесі жұп сан болса ғана Эйлер циклы болады.

Анықтама. Мультиграфтың барлық қабырғалары болатын цикл Эйлер циклы деп, ал Эйлер циклы бар граф Эйлер графы деп аталады. Жоғардағы суреттегі мультиграфта Эйлер циклы жоқ, себебі онда дәрежесі тақ төбе бар. Айталық ондай цикл бар деп жориық. Олай болғанда бұл циклдың бойымен жүре отыра графтың кез келген төбесіне одан шығу қанша болса сонша рет кіреміз. Демек, G графының әр төбесінің дәрежесі жұп болуы керек. G графында керісінше барлық төбелер тақ дәрежелі.

Бұл тұжырым кез келген бағытталған G графына да жарамды. Сонымен бағытталмаған G графында оның барлық қабырғалары арқылы өтетін цикл бар болу үшін G графының төбелерінің дәрежесі жұп болуы қажетті.

Анықтама. Бағытталмаған (бағытталған) G графындағы цикл оның барлық қабырғалары арқылы өтсе, ол- Эйлер циклы деп аталады. Бағытталмаған графта Эйлер циклы бар болу үшін бұл графтың байланысты болуы қажетті.

Анықтама. Кез келген $x, y \in V(G)$ төбелерін қосатын жол бар болса бағытталмаған G графы байланысты граф деп аталады.

Анықтама. Егер C циклы Бағытталмаған G графының барлық қабырғалары арқылы өтетін болса, кез-келген $x, y \in V(G)$ төбелері үшін C циклының x төбесінен y төбесіне апаратын $C(x, y)$ кесіндісі x -тен y -ке апаратын

жол болып табылады. Олай болса G байланысты. Эйлер циклының бар болуы үшін графтың дәрежелерінің жұп болуы және оған қоса графтың байланысты болуы жеткілікті екен.

Эйлер теоремасы. Бағытталмаған графта Эйлер циклы болу үшін оның байланысты болуы және оның барлық дәрежелерінің жұп болуы қажетті және жеткілікті.

Эйлер теоремасын шамалы өзгеріспен бағытталған графтарға да қолдануға болады. Ол үшін бағытталған графтардың да байланысты болу ұғымын енгізу керек.

Доғаларының бағыттарын алып тастағаннан кейінгі алынған бағытталмаған G графы байланысты болса, бағытталған G графы байланысты деп аталады.

Теорема. Бағытталған G графында Эйлер циклы болу үшін оның әр төбесіне кіретін дәрежемен шығатын дәрежелердің бірдей болуы қажетті және жеткілікті. $d^+(x) = d^-(x)$ барлық $x \in V(G)$.

Байланысты және тиелген бағытталмаған графтағы белгіленген V_0 және V_n төбелерін қосатын ең қысқа жолды іздеуді жүзеге асыратын Форд алгоритмі.

V_0 төбесіне λ_0 таңбасы беріледі де, қалған төбелердің таңбалары $\lambda = \infty V_0$ болады.

(V_i, V_j) қабырғаларының ішінен $\lambda_j - \lambda_i > L((V_i, V_j))$ орындалатындай қабырғалар ізделеді және олардың λ_j индекстері $\lambda_j' = \lambda_i + L((V_i, V_j))$ алмастырылады. Индекстерді өзгерту процесі одан әрі λ_j таңбасын азайту мүмкіндігі болмайтын бірде бір қабырға қалмағанша жүргізіледі. Нәтижесінде әр төбенің таңбасы осы төбенің V_0 төбесіне дейінгі ең қысқа қашықтықты көрсетеді. Ең қысқа жолдың өзін табу үшін V_n төбесінен екі жағындағы төбелердің таңбаларының айырымы қабырғаның ұзындығына тең қабырғалардың бойымен қозғалу қажет.

Гамильтон циклдары. Гамильтон циклдары туралы есептің интерпритациясы ретінде ең көп тараған коммивояжер туралы есепті қарастыруға болады.

Коммивояжер аралайтын бірнеше қалалардың арақашықтықтары белгілі.

Барлық қалаларда бір реттен ғана болып алғашқы шыққан қаласына қайтып келетін маршрутты табу керек. Егер мұндай маршруттар бірнешеу болса, олардың ең қысқасын табу керек. Мұндай есептер іс жүзінде жиі кездеседі, мысал үшін өндіріс өнімдерін сауда орталықтарына ең қысқа жолмен жеткізу есебі.

Мұндай есептерді шешудің жалпы ортақ теоремалары мен көлемі жөнінен шағын, әрі тиімді алгоритмдердің жоқтығы есепті шешуде қиындықтар туғызады.

Анықтама. Айталық $G(V, E)$ байланысты бағытталмаған граф. G графының барлық төбелері арқылы өтетін, басталуы мен аяқталуы әр түрлі төбелерде болатын қарапайым цикл Гамильтон циклы деп аталады. Графтарда Гамильтон циклдары мен шынжырлары бар болудың жеткілікті шартын келтірейік. Айталық дәр. $v-v \in V$ төбесінің дәрежесі болсын.

Теорема. Егер $G(V, E)$, мұндағы $|V|=n$ графында кез келген төбелер v_i және v_j жұптары үшін $\text{дәр}.v_i + \text{дәр}.v_j \geq n-1$, орындалса, графта гамильтон шынжыры бар, ал егер $\text{дәр}.v_i + \text{дәр}.v_j \geq n$ немесе $\text{дәр}.v_i \geq n/2$ графта Гамильтон циклы бар.

Бақылау сұрақтары:

1. Цикл деп нені айтамыз?
2. Қандай граф Эйлер графы деп аталады?
3. Графтың Эйлер графы болуының жеткілікті және қажетті шартын атаңыз?
4. Гамильтон шынжыры, Гамильтон циклы дегендер не?
5. Коммивояжер есебін шешудің қандай алгоритмі белгілі?