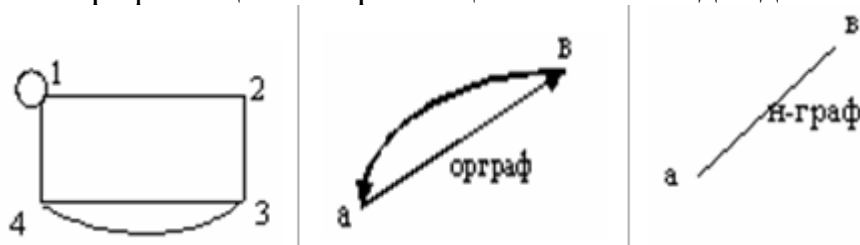


## 9-Дәріс тақырыбы: Графтар және желілер. Бағытталған және бағдарланбаған бағандар. Графтарды тапсыру тәсілдері

Граф ұғымы. Көптеген қолданбалы есептерде айналамызды қоршаған ортаның әртүрлі объектілер арасындағы байланыстар жүйесі зерттеледі. Объектілер төбелер деп аталып, нүктелер арқылы белгіленеді, ал төбелер арасындағы байланыстар доғалар деп аталып, сәйкес нүктелерді қосатын бағытталған түзулермен белгіленеді. Қала көшелерін граф арқылы кескіндеуге болады: көше қиылысуларын графтардың төбесі деп, ал көшелерді доғалар деп алуға болады;

Блок-схемаларды да граф түрінде кескіндеуге болады: блоктар — граф төбелері, ал операцияның орындалу кезегін көрсететін стрелкалар доғалар.

Анықтама:  $G=(M,R)$  алгебралық жүйе граф деп аталады. Мұндағы  $M$ — жиынтығы бос емес жиын, оның элементтері графтың төбелері деп аталады, ал бинарлы  $R$  қатынасының  $R \subseteq M^2$  элементтері доғалар деп аталады. Сонымен граф төбелері дегеніміз —айналамызды қоршаған ортаның кез келген объектісі. Олардың саны шектеулі болғандықтан,біз оларды натурал сандармен белгілейміз. Ал граф қабырғалары оның кейбір төбелерін қосады. Граф қабырғаларын әдетте латын әріптерімен белгілейді.  $G= \langle M,R \rangle$  графының геометриялық кескіні жазықтықта графтың әр төбесін нүкте арқылы белгілеп , егер  $(a,b) \in R$  болса  $a$  төбесінен  $b$  төбесіне доға жүргізу арқылы алынады. Мысалы: төбелері  $M=\{1,2,3,4\}$ , ал доғалары  $R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,3),(4,1)\}$  болатын  $G$  графының геометриялық кескіні төмендегідей:



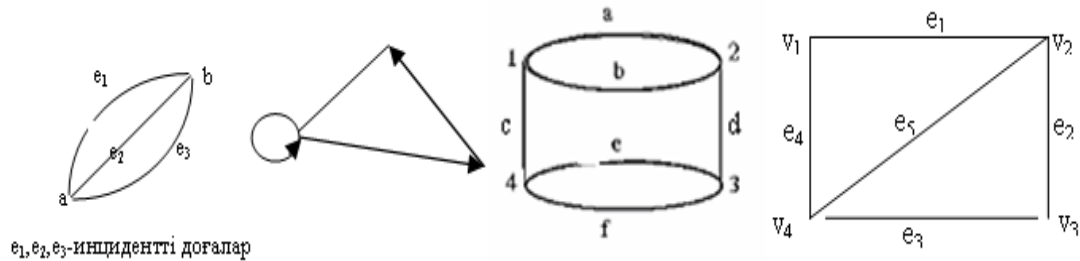
Графтың төбелерінің қандай сызықтарымен қосылатындығы (түзу әлде қисық), сызықтардың ұзындығы туралы ақпараттар маңызды емес. Төбелердің арасында байланыс бар екендігі және ол байланыс туралы ақпарат  $R$  доғалар жиынында екендігі болса болды. Төбелерді қосатын сызықтардың бағыты көрсетілген болуы мүмкін (мысалдағы сияқты). Мұндай граф бағытталған граф деп аталады (оргграф). Оған математикалық түрде мынандай анықтама беруге болады.

Анықтама: Егер  $R$  қатынасы симметриялы болмаса, яғни  $(a,b) \in R, (b,a) \notin R$  онда  $G=\langle M,R \rangle$  графы бағытталған (оргграф) деп аталады, ал  $R$  қатынасы симметриялы болса  $(a,b) \in R, (b,a) \in R$  онда  $G$  бағытталмаған (неоргграф) немесе н-граф деп аталады. Айталық:  $a, b$ -граф төбелері,  $e=(a,b)$  оларды қосатын доға болсын. Мұндай жағдайда  $a, b$  төбелері мен  $e$  доғасы инцидентті деп аталады.  $b$  мен  $e$  доғасы да инцидентті. Әр доға  $e \in E$  өзі қосатын екі төбеге инцидентті болады. Бір доғамен қосылатын 2 төбе сыбайлас (бүйірлес) деп аталады.

Анықтама: Төбелердің бір жұбына инцидентті доғалар еселі немесе параллель доғалар деп аталады

**Анықтама:** Еселі доғалары бар граф мультиграф деп аталады.

**Анықтама:** Шығатын және кіретін төбесі біреу болатын доға ілгек деп аталады.



**Анықтама:** Егер  $(a,b)$ ,  $(b,a)$  доғалары бір уақытта  $R$  қатынасына жатса, онда бұл доғалар туралы ақпаратты  $[a,b] = \{(a,b), (b,a)\}$  жиыны арқылы көрсетуге болады.  $[a,b]$  жиыны қабырға деп аталады.

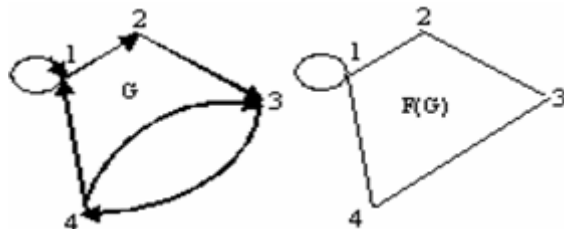
Мысалы, мына суреттегі графтың 4 төбесі, 5 қабырғасы бар.

Төбелері:  $v_1, v_2, v_3, v_4$ ; Қабырғалары:  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ ; Бұл графтағы  $v_1$  мен  $v_2$ ;  $v_2$  мен  $v_3$ ;  $v_3$  пен  $v_4$ ;  $v_4$  пен  $v_1$  іргелес төбелер,  $v_1, v_3$ -сыбайлас емес.

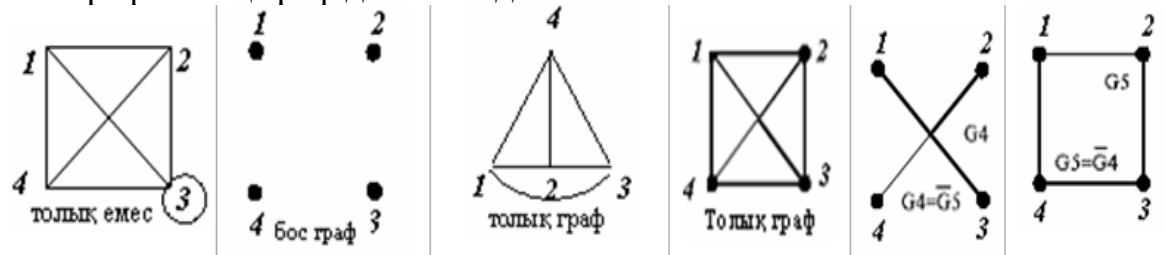
Сол сияқты:  $e_1, e_2$ ;  $e_2, e_3$ ;  $e_3, e_4$ ;  $e_4, e_1$ ;  $e_1, e_5$ ;  $e_2, e_5$ ;  $e_3, e_5$ ;  $e_4, e_5$ -қабырғалары сыбайлас.  $e_1, e_3$ ;  $e_2, e_4$ -сыбайлас емес қабырғалар.

Егер  $G = \{M, R\}$  орграфындағы әр  $(a,b) \in R$  доғасына,  $(b,a)$  жұбын қосса нәтижесінде берілген  $G$  графына сәйкес  $H$ -граф шығады, оны  $F(G)$  деп белгілейді.

**Анықтама:** Егер граф элементтерінің (төбелері мен қабырғалары) жиыны ақырлы болса, графта ақырлы деп, ал қабырғалар жиыны бос болса, бос граф деп аталады.



Ілгексіз, әрі еселі қабырғалары жоқ және әрбір төбелер жұбы қабырғамен қосылған граф толық граф деп аталады.



**Анықтама:** Берілген  $G$  графындағыдай төбелері және  $G$  графына қосқанда оны толық графқа айналдыра тындай ғана қабырғалары бар  $\bar{G}$  графы  $G$ -ң толықтауыш графы деп аталады.

**Анықтама:** Бағытталмаған графтың әр қабырғасын қарама қарсы бағытталған доғалармен алмастырғаннан алынған граф берілген графқа сәйкес канонды граф деп аталады.

**Анықтама:** Еселі доғаларсыз бағытталған графты көбіне диграф деп атайды.  $G = \langle V, E \rangle$  -  $V$ -бос емес (төбелерінің) жиын;  $E \subseteq V \times V$ ;

Анықтама  $G$  н-графының  $V$  төбесіне инцидентті қабырғалар саны  $P(v) \forall v \in V$  төбесінің локальді дәрежесі деп аталады. Н-графта барлық төбелердің локальды дәрежелерінің қосындысы графтың 2 еселенген қабырғалар санына тең, яғни жұп сан. Ілгек төбе дәрежесіне 2-ге тең үлес қосады:

$$\sum_{v \in G} \rho(v) = 2m$$

Анықтама Егер локальды дәреже жұп болса, төбе жұп деп, ал тақ болса төбе тақ төбе деп аталады. 0 дәрежелі төбе оқшауланған төбе деп аталады.

$V = \{1, 2, 3, 4\}$ .  $G_1: \rho(1) = 3, \rho(2) = 4, \rho(3) = 3, \rho(4) = 4$ ,

$\sum_{v \in G} \rho(v) = 14 = 2m$ ; Мұндағы,  $m = 7$  – графтың

қабырға ларының саны. Бағытталған графтың төбелері үшін 2 локальды дәреже анықталады.  $\rho_1(v)$  –  $v$  төбесінен шығатын қабырғалар саны.  $\rho_2(v)$  –  $v$  төбесіне кіретін қабырғалар саны. Бағытталған графта барлық төбелердің локальды дәрежелері  $\rho_1(v)$ ,  $\rho_2(v)$  осы графтың қабырғалар санына тең, демек олар өзара тең

$$\sum_{v \in G} \rho_1(v) = \sum_{v \in G} \rho_2(v) = m; \text{ Мысалы:}$$

$$\rho_1(1) = 2, \rho_1(2) = 3, \rho_1(3) = 1, \rho_1(4) = 1;$$

$$\rho_2(1) = 1, \rho_2(2) = 1, \rho_2(3) = 2, \rho_2(4) = 3;$$

$$\sum_{v \in G} \rho_1(v) = \sum_{v \in G} \rho_2(v) = 7 = m$$

1-ші, 2-ші типті дәрежелер қосындысы бірдей қабырғалар санына тең. Егер  $G^1$  төбелері мен қабырғалары  $G_2$  графының төбелері мен қабырғалары бірдей болса, яғни:  $V_1 = V_2$ ,  $E_1 = E_2$  болса, онда  $G_1 = G_2$ .

### Графтардың берілу тәсілдері.

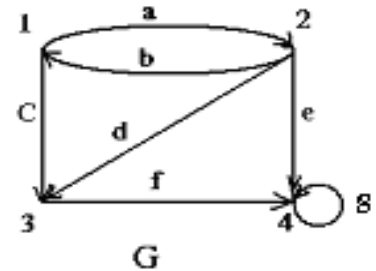
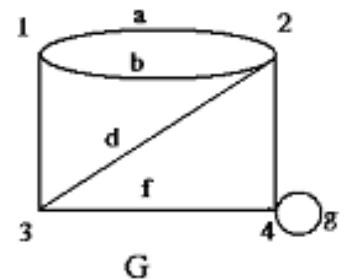
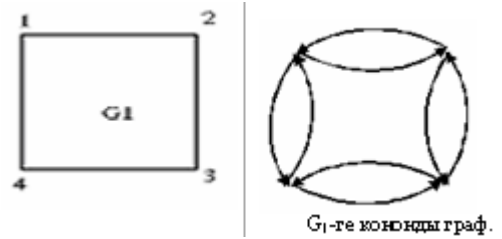
Графтардың берілуі дегеніміз оның төбелері мен қабырғаларынан тұратын жиындарды сипаттау болып табылады. Төбелер мен қабырғаларды жай ғана нөмірлеуге болады.

1. Төбелері:  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ; Қабырғалары:  $e_1, e_2, \dots, e_n$

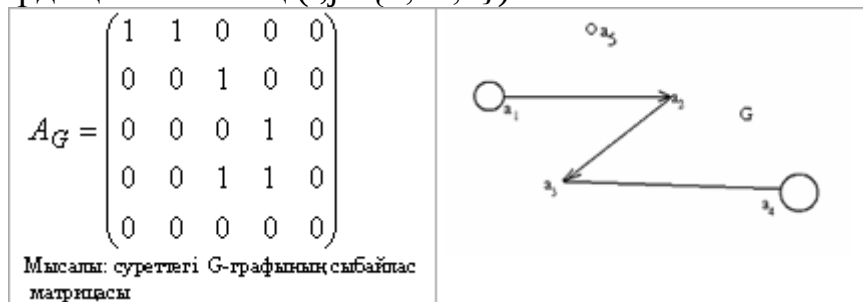
2. Граф құрылымы туралы ақпарат бинарлы қатынас матрицасы арқылы да беріледі. Мысалы,  $G = \langle M, R \rangle$  граф болсын.  $M$  төбелер жиыны  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .  $R$  граф төбелерінің арасындағы бинарлы қатынас болсын.  $G$ -графының сыбайлас матрицасы деп төмендегідей анықталған  $n$  ретті  $A_G = \{A_{ij}\}$  матрицаны айтамыз.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } (a_i, a_j) \in R \\ 0, & \text{егер } (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

н-графта  $a_i, a_j$  төбелері іргелес болады, егер  $A_{ij} = 1$  немесе  $A_{ji} = 1$ , яғни н-графта  $A_{ij} = A_{ji} = 1$ . Егер  $G$  мультиграф болса оның іргелестік  $A_G$  матрицасының  $A_{ij}$



элементтері анықтама бойынша  $a_i$  төбесінен шығып  $a_j$  төбесіне кіретін доғалардың санына тең ( $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ).



Егер  $A_G$ –н-граф болса, оның іргелестік матрицасы  $A_G$ –симметриялы, яғни  $A_G^T = A_G$ . Төбені өзімен қайта қосатын доға–ілгек деп аталады. Егер графта ілгек доғалар болмаса, онда іргелестік  $A_G$  матрицаның бас диагоналінде нөлдік элементтер тұрады.

3. Графының инциденттік матрица арқылы берілуі.

Анықтама:  $m \times n$  мөлшерлі инциденттік матрица  $B_G$  деп төмендегі ережемен анықталатын матрицаны айтамыз. G-н-граф болса

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } e_i \text{ қабырға } v_j \text{ төбесіне инцидентті болса} \\ 0 & \text{– егер керісінше болса} \end{cases} \quad A_G = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & * & \\ & & 0 & & \\ * & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

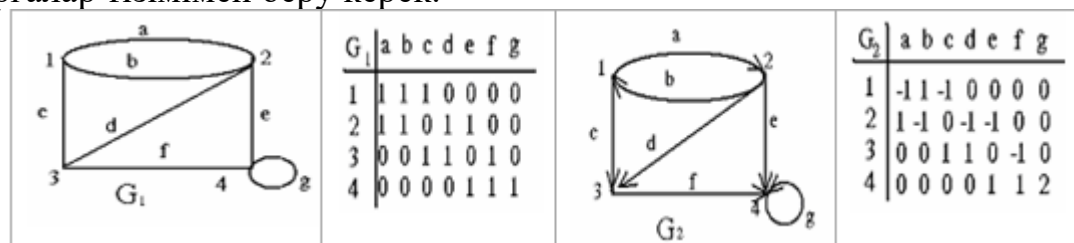
G оргграф болса

$$B_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{егер } v_j \text{ төбе } e_i \text{ аабыр ааб басы болса;} \\ 1, & \text{егер } v_j \text{ т б } e_i \text{ аабыр ааб со о болса;} \\ \vdots \\ \alpha & (-1, 1, 0 \text{ бас а кез келген сан}), \text{егер } e_i \text{ – ілгек,} \\ \alpha & v_j \text{ – о а инцидентті т б болса;} \\ 0 & \text{– аал а жа аа аа;} \end{cases}$$

4. Графтың қабырғаларының тізімімен берілуі:

Граф екі бағанмен беріледі: біріншісінде барлық қабырғалар  $e_i$ , ал оң жақ бағанда оған инцидентті төбелер жазылады; н-граф үшін төбелердің жазылу реті еркін түрде, ал оргграф үшін қабырғаның басталатын төбесі 1-ші тұрады.

1-мысал: суреттегі графты іргелес және инциденттік матрицалармен және қабырғалар тізімімен беру керек.



$G_1, G_2$ – графтары мен олардың инциденттік матрицалары

| $G_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|
| 1     | 0 | 2 | 1 | 0 |
| 2     | 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3     | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4     | 0 | 1 | 1 | 1 |

| $G_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|
| 1     | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2     | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3     | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4     | 0 | 0 | 0 | 1 |

| $G_1$ Қабырға | төбе |
|---------------|------|
| a             | 2 1  |
| b             | 1 2  |
| c             | 3 1  |
| d             | 2 3  |
| e             | 2 4  |
| f             | 4 3  |
| g             | 4 4  |

| $G_2$ Қабырға | төбе |
|---------------|------|
| a             | 1 2  |
| b             | 2 1  |
| c             | 1 3  |
| d             | 2 3  |
| e             | 2 4  |
| f             | 3 4  |
| g             | 4 4  |

$G_1, G_2$  графтарының сыбайлас (іргелес) матрицалары және қабырғалары мен төбелерінің тізімімен берілуі.  $G_1$ -бағытталмаған граф болғандықтан төбелердің бағыты еркін түрде көрсетіледі

$G$  графын оның әр төбесіне  $v_i \in V(G)$  сыбайлас төбелердің жиыны арқылы да өрнектеуге болады. Ол жиынтықты  $v_i$ . Төбесінің аймағы деп атайды және  $O(v_i)$  деп белгілейді. Сонымен

$$O(v_i) = \{ v_j \mid [v_i, v_j] \in E(G) \}.$$

$G$  диграфын оның әр төбесіне  $v_i \in V(G)$  шығунемесе кіру аймақтарын көрсету арқылы да өрнектеуге болады:  $O^-(v_i) = \{ v_j \mid (v_i, v_j) \in E(G) \}$ ,

$$O^+(v_i) = \{ v_j \mid (v_j, v_i) \in E(G) \}.$$

*1. Қабырғаларының тізімі бойынша инцидентті матрица құру.*

Тізімнің әр жолы сол нөмірмен алынған матрица жолына сәйкес.  $H$ -граф үшін тізім жолында инцидентті матрица жолындағы 1-ге тең элементтердің (төбелердің) нөмірлері көрсетілген.

Орграф үшін бұл жолда бірінші болып матрицаның -1-ге тең элементінің нөмірі, екіншісі болып матрицаның 1-ге тең элементінің нөмірі көрсетіледі. Тізім жолындағы нөмірлер бірдей болған жағдайда, инцидентті матрицаның жолындағы аталған элементке 2 қойылады.

*2. Іргелес матрица бойынша, қабырғалар тізімін құру.*

$i$ -жол мен  $j$ -баған қиылысуында орналасқан матрица элементіне әр қайсысында  $i, j$  нөмірлері жазылған қабырғалар тізімінің  $\delta_{ij}$  жолы сәйкес келеді. ( $\delta_{ij}=0$  болса бір де бір жол жоқ).  $n$ -граф үшін бұл жолдар іргелес матрицаның тек жоғарғы оң жақ үшбұрышындағы элементтерге сәйкес болады, яғни  $j > i$  орындалатын  $\delta_{ij}$  элементтер үшін, ал орграф үшін барлық  $\delta_{ij}$  элементтерді қарастыру керек.

### **Салмақтанған графтар.**

Көп есептерде графтардың төбесі мен доғалары туралы қосымша ақпарат қажет болады, мысалы, егер граф қалааралық жолдарды бейнелесе салмақтанған графтар қолданылады.

Айталық  $S_M, S_R$  - таңбалар жиыны болсын.  $f: M \rightarrow S_M$  (төбелерді таңбалау),  $g: R \rightarrow S_R$  (доғаларды таңбалау) функциялары  $G = \langle M, R \rangle$  графын таңбалау бөлінуі деп аталады.  $G = \langle M, R, f, g \rangle$  таңбаланған немесе салмақтанған граф деп аталады.

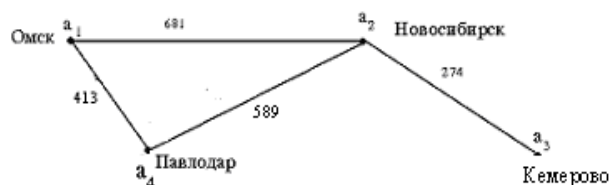
$f(a)$ - $a$  төбесінің салмағы деп, ал  $g(e)$   $e$  доғасының салмағы деп аталады. Доға мен төбенің біреуінің ғана таңбалануы жиі кездеседі.

Мысалы: Айталық  $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ,  $R = \{[a_1 a_2], [a_2 a_3], [a_1 a_4], [a_2 a_4]\}$ ;

$f: M \rightarrow C$  мұндағы,  $C$  - қалалар жиыны,  $g: R \rightarrow W$ .

$f(a_1) = \text{Омск}$ ,  $f(a_2) = \text{Новосибирск}$ ,  $f(a_3) = \text{Кемерово}$ ,  $f(a_4) = \text{Павлодар}$

$g([a_1 a_2]) = 681$ ;  $g([a_2 a_3]) = 274$ ,  $g([a_1 a_4]) = 413$ ;  $g([a_2 a_4]) = 589$ . Таңбалаған  $\langle M, R, f, g \rangle$  графты-белгілі бір қалалар арасындағы ұзындығы көрсетілген автомобиль жолдарының схемасы. Салмақталған графтардағы доғалардың салмағы туралы ақпаратты салмақ матрицасы арқылы кескіндеуге болады.  $W = (w_{ij})$  - мұндағы  $w_{ij} = (a_i, a_j)$  доғасының салмағы жоқ доғалар әдетте ноль немесе  $\infty$  белгісімен белгіленеді. Қарастырылған мысал үшін салмақтылық матрицасының түрі



$$W = \begin{pmatrix} 0 & 681 & \infty & 413 \\ 681 & 0 & 274 & 589 \\ \infty & 274 & 0 & \infty \\ 413 & 589 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

### Графтарға қолданылатын амалдар. Графқа төбе қосу.

$G = \langle M, R \rangle$  графына  $a$  төбесін қосқаннан  $\langle M \cup \{a\}, R \rangle$  графы құралады.

Графқа доға қосу операциясының нәтижесінде  $\langle M \cup \{(a,b)\}, R \cup \{(a,b)\} \rangle$  графы құрылады.

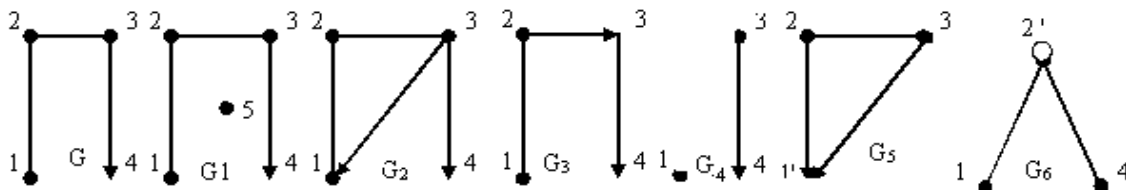
Графтан доға алу –  $R$  доғалар жиынынан  $(a,b)$  жұбы алынады.  $\langle M, R \setminus \{(a,b)\} \rangle$

Графтан төбе алу операциясының нәтижесінде.  $G$  графынан  $a$  төбесі оған инцидентті доғалармен бірге алынады деп айтады.  $\langle M \setminus \{a\}, R \setminus \{(b,c) \mid b = a \text{ немесе } c = a\} \rangle$

Графтың  $a, b$  төбелерін теңестіру деп графтан  $a, b$  төбелерін алып тастап мына тәртіппен төбе мен қабырға қосу: жаңа  $a^1$  төбесі мен  $(a^1, c)$ , егер  $(a, c) \in R$  немесе  $(b, c) \in R$  және  $(c, a^1)$  доғасын егер  $(c, a) \in R$  немесе  $(c, b) \in R$  болса:  $\langle (M \setminus \{a, b\}) \cup \{a^1\}, (R \setminus \{(c, d) \mid c = a \text{ немесе } d = a, \text{ немесе } c = b, \text{ немесе } d = b\}) \cup \{(a^1, c) \mid (a, c) \in R, \text{ немесе } (b, c) \in R\} \cup \{(c, a^1) \mid (c, a) \in R, \text{ немесе } (c, b) \in R\} \rangle$ .

Алынған граф  $G$  графынан  $a, b$  төбелерін теңестіргеннен алынды делінеді.

$a, b$  төбелері доғамен қосылса, төбелерді теңестіру  $a, b$  доғасын созғаннан алынады дейді. Мысалдар: Берілген  $\langle \{1, 2, 3, 4\}, \{[1, 2], [2, 3], (3, 4)\} \rangle$  графынан суреттегі  $G_1$ – $G_6$  графтары қандай операциялармен алынды?



$G$  графына 5 төбені қосқаннан  $G_1$  графы алынды.

$G$  графына  $(3,1)$ –доғасын қосқаннан  $G_2$  графы алынды.

$G$  графына  $(3,2)$  доғасы алынады  $G_3$  графы алынды.

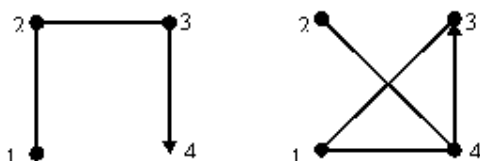
$G$  графына 2 – төбені алғаннан  $G_4$  графы алынды.

$G$  графының  $(1,4)$  төбелерін теңестіргеннен  $G_5$  графы алынды.

$G$  графының  $(2,3)$  доғасын қысқаннан  $G_6$  графы алынды.

$\bar{G} = \langle M, M^2 \setminus R \cup \text{Id}_M \rangle$  графы ілгексіз  $G = \langle M, R \rangle$  графының толықтырушы графы деп аталады.

Мысал: Айталық,  $G_1 = \langle M_1, R_1 \rangle$ ,  $G_2 = \langle M_2, R_2 \rangle$  графтары берілсін.



$$G = \langle M, R \rangle; \bar{G} = \langle M, M^2 \setminus R \cup \text{Id}_M \rangle$$

**Анықтама:**  $G_1, G_2$  графтарының бірігуі деп  $G_1 \cup G_2 = \langle M_1 \cup M_2, R_1 \cup R_2 \rangle$  графын айтады.

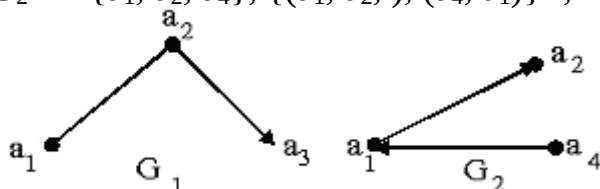
**Анықтама:** Егер  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  онда  $G_1, G_2$  графының қиылысуы деп,  $G_1 \cap G_2 = \langle M_1 \cap M_2, R_1 \cap R_2 \rangle$  графын айтады.

**Анықтама:**  $G_1, G_2$  графтарының сақиналы қосындысы деп  $G_1 \oplus G_2 = \langle M_1 \cup M_2, R_1 \oplus R_2 \rangle$ , мұндағы  $R_1 \oplus R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$ .

Мысалы  $G_1$  және  $G_2$  графтары берілсін.

$G_1 = \langle \{a_1, a_2, a_3\}, \{(a_1, a_2), (a_2, a_3)\} \rangle$ ;

$G_2 = \langle \{a_1, a_2, a_4\}, \{(a_1, a_2), (a_4, a_1)\} \rangle$ ;



Табу керек:  $G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2, G_1 \oplus G_2$ ?

**Шешуі:** Анықтама бойынша:

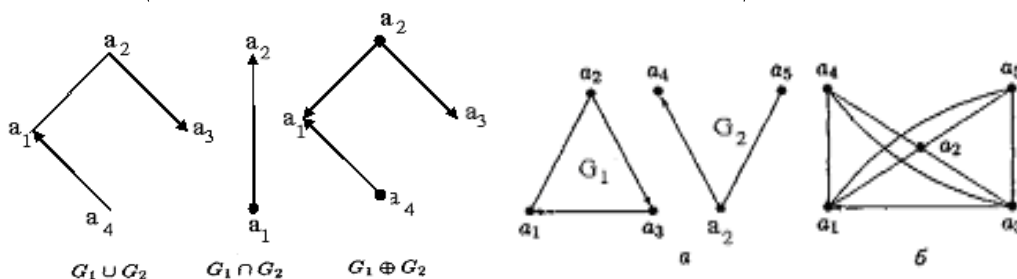
$G_1 \cup G_2 = \langle \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_4, a_1)\} \rangle$ ;

$G_1 \cap G_2 = \langle \{a_1, a_2\}, \{(a_1, a_2)\} \rangle$ .

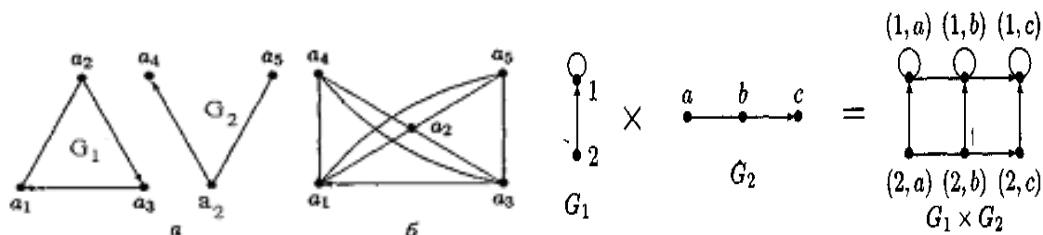
$G_1 \oplus G_2 = \langle \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_1)\} \rangle$ ;

$G_1, G_2$  графтарының қосылуы деп

$G_1 + G_2 = \langle M_1 \cup M_2, R_1 \cup R_2 \cup \{[a, b] | a \in M_1, b \in M_2, a \neq b\} \rangle$ .



Мына суреттің а пунктіндегі  $G_1, G_2$  графтарының қосындысы б пунктте көрсетілген.



$G_1, G_2$  графтарының көбейтіндісі деп  $G_1 \times G_2 = \langle M_1 \times M_2, R \rangle$ , мұндағы  $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$  тек сонда ғана, егер  $a_1 = a_2$  және  $(b_1, b_2) \in R_2$  немесе  $b_1 = b_2$  және  $(a_1, a_2) \in R_1$ .

**Ішкі графтар және графтардың бөлігі.**

**Граф бөліктерімен операциялар.**

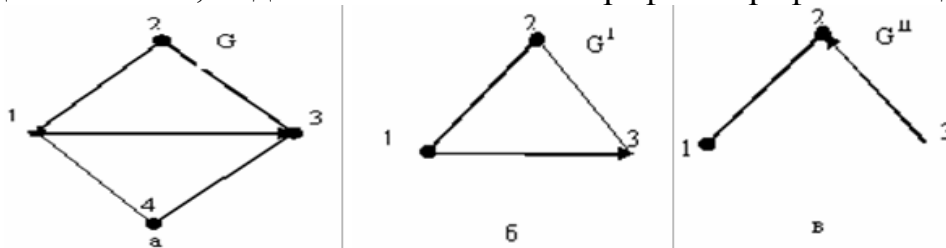
**Анықтама:** Егер  $M^1 \subseteq M$  және  $R^1 \subseteq R \cap (M^1)^2$  болса, яғни  $G^1$  графының төбелер жиыны  $G$  графы төбелер жиынына, ал  $G^1$  қабырғалар жиыны  $G$  графының қабырғалар жиынына жатса  $G^1$ -  $G$  бөлігі деп аталады.

**Анықтама** Айталық.  $G = \langle M, R \rangle, G^1 = \langle M^1, R^1 \rangle$  графтары берілсін. Егер  $M^1 \subseteq M$  және  $R^1 = R \cap (M^1)^2$  болса, яғни  $G^1$  графының төбелер жиыны  $G$ -ң төбелер

жиынында жатса ал  $G^1$ -ң доғалары екі жағымен де  $G$  графына жатса  $G^1$ – $G$  графының ішкі графы деп аталады.

**Анықтама.** Егер  $H$  графының төбелер жиыны  $V(H)$  мен қабырғалар жиыны  $E(H)$   $G$  графының сәйкесінше төбелері мен қабырғалар  $V(G)$ ,  $E(G)$  жиындарында жатса  $V(H) \subset V(G)$  және  $E(H) \subset E(G)$ , онда  $H$  графы  $G$  графының бөлігі деп аталады  $H \subset G$ .

**Анықтама** Егер  $V(H) = V(G)$ ,  $G$  графының бөлігі  $H$  суграф деп аталады. Егер  $G$  графының кез келген төбесі  $H$  графының ең болмаса бір қабырғасына инцидентті болса, онда бағытталмаған  $H$  графы  $G$  графын жабады дейміз.



Мысалы: а)  $G = \langle \{1, 2, 3, 4\}, \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [3, 4]\} \rangle$

б)  $G^1 = \langle \{1, 2, 3\}, \{[1, 2], [1, 3], [2, 3]\} \rangle$  –  $G$  ішкі графы ( $M^1 \subseteq M, R^1 = R \cap R^1$ )

в)  $G^{11} = \langle \{1, 2, 3\}, \{[1, 2], (2, 3)\} \rangle$  –  $G$  графының бөлігі ( $M^{11} \subseteq M, R^{11} \subseteq R \cap (M^{11})^2$ )

### Граф бөліктеріне қолданылатын амалдар.

Граф бөліктеріне төмендегідей амалдар орындалады:

$H$ -бөліктің толықтаушы  $\bar{H}$  –  $G$ -графының  $H$ -ға жатпайтын барлық қабырғалар жиынымен анықталады.  $H : E(H) \cap E(\bar{H}) = \emptyset, E(H) \cup E(\bar{H}) = E(G)$ ,

мұндағы  $E(G)$  –  $G$ -графының қабырғаларының жиыны.

-  $G$  графының  $H_1, H_2$  бөліктерінің қосындысы  $H_1 \cup H_2$  :

-  $V(H_1 \cup H_2) = V(H_1) \cup V(H_2)$  және  $E(H_1 \cup H_2) = E(H_1) \cup E(H_2)$  ;

-  $G$  графының  $H_1, H_2$  бөліктерінің көбейтіндісі  $H_1 \cap H_2$  :  
 $V(H_1 \cap H_2) = V(H_1) \cap V(H_2)$  және  $E(H_1 \cap H_2) = E(H_1) \cap E(H_2)$  ;

Егер  $H_1, H_2$  бөліктерінің ортақ төбелері болмаса, яғни  $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$ , демек ортақ қабырғалары да жоқ  $E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset$ , онда  $H_1, H_2$  бөліктері төбелері бойынша қиылыспайды.

Егер  $H_1, H_2$  бөліктерінің ортақ қабырғалары болмаса  $E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset$ , онда  $H_1, H_2$  бөліктері қабырғалары бойынша қиылыспайды.

Егер  $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$  болса онда  $H_1 \cap H_2$  тура қосынды деп аталады.

### Графтар мен бинарлы қатынастар.

$V$  жиынында берілген  $R$  қатынасына өзара бір мәнді анықталған,  $v' R v''$  орындалса ғана  $(v', v'')$  қабырғасы бар болатын  $V$  төбелер жиындарымен қабырғалар еселі емес бағытталған  $G(R)$  графы сәйкес келеді.

**1-мысал:** Симметриялы, антисимметриялы, рефлексивті, антирефлексивті, транзитивті  $R$  бинарлы қатынасына өзара бір мәнді сәйкес  $G$  графының қандай ерекшеліктері бар?

Айталық,  $R$  бинарлы қатынасы  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  жиынында анықталсын.

а) симметриялы  $R$  қатынасына еселі қабырғалары жоқ,  $v' R v''$  орындалса ғана  $(v', v'')$  қабырғасы бар болатын бағытталмаған  $G(R)$  графы сәйкес келеді (симметриялы болғандықтан  $v'' R v'$ ).

б) Антисимметриялы  $R$  қатынасына еселі қабырғаларсыз, (әртүрлі төбелерге қарама-қарсы бағытталған қабырғалары бар төбелер болмайтын) өзара бір мәнді бағытталған  $G(R)$  графы сәйкес келеді.

в) Егер  $R$  рефлексивті болса, барлық төбелерінде ілгектері бар еселі қабырғаларсыз  $G(R)$  графы сәйкес келеді.

г) Егер  $R$  антирефлексивті болса, еселі қабырғаларсыз  $G(R)$  графында бір де бір ілгек болмайды.

д) Егер  $R$  транзитивті болса, еселі қабырғаларсыз  $G(R)$  графының әрбір  $(v', v'')$  және  $(v'', v''')$  қабырғалар жұбына оларды тұйықтайтын  $(v', v''')$  қабырғасы бар болады.

Негізгі әдебиет: 1 [161-180]; 2[108-114].

Қосымша әдебиет: 7[88-130].

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай графтар бағытталған графтар деп аталады?
2. Қандай графтар бағытталмаған деп аталады?
3. Графтарда қандай төбелер сыбайлас төбелер деп аталады?
4. Төбелер дәрежесі деген не?
5. Графтардың берілу тәсілдерін атаңыз.
6. Графтармен қандай операциялар орындалады.