

Дәріс 8. Аксиоматикалық теориялар. Пікірлерді есептеу.

Предикаттар.

Пікірлер логикасы математиканың көптеген сөйлемдерін сипаттауға жеткіліксіз болғандықтан, біздің негізгі қажеттігімізді атқара алмайды. Мысалы, қандай да бір жиынның элементтеріне амалдар қолдану арқылы пайда болған өрнектердің өзара қатынасы немесе элементтер арасындағы қатынастарды білдіретін предикаттар ұғымдарын пікірлер логикасының тілінде жазып, талдау – үлкен, кейде шешілмейтін қиындықтар тудырады. Демек пікірлер есептеуінің қорыту теориясы көптеген математикалық тұжырымдарды дәлелдеуге жеткіліксіз. Сондықтан, пікірлер логикасының тілінен әлдеқайда қуатты және маңызды предикаттар логикасының тілін, осы тілде баяндалатын сөйлемдердің мағынасын зерттеу қажеттілігі туады. Мысалы, қарапайым математикалық қорыту бойынша

«Кез келген нақты сан комплекс сан болады.»

« $\sqrt{2}$ – нақты сан»

себептерінен

« $\sqrt{2}$ – комплекс сан»

тұжырымы (салдары) қорытылады. Бірақ бұл қорытудың логикалық мінсіздігін пікірлер есептеуі көлемінде анықтай алмаймыз. Өйткені, пікірлер есептеуі сөйлемді құратын қарапайым пікірлер негізінде тұтас берілген сөйлем туралы қорытынды жасайды. Бірақ, ол жүйеде әрбір қарапайым сөйлемдегі нысандарға талдау жасау мүмкін емес. Сонымен бірге пікірлер есептеуінің тіліне қосымша айнымалы, тұрақты, терм, предикат және квантор ұғымдарын предикаттар логикасының тіліне енгізу арқылы көптеген математикалық сөйлемдерді символды түрге көшіріп, математикалық тұжырымдарды математикалық логика тұрғысынан талдауға мүмкіндік аламыз. Енді осы ұғымдардың математикалық логикада қандай мағынада қолданылатынына аздаған шолу жасайық.

Математикада қарастырылып отырған нысандардың орнына қандай да бір айнымалыны қолдану әдеттегі жай. Айталық «квадраты екіге тең болатын сан » деген сөйлем орнына « $x^2=2$ » теңдеуін жазамыз. Мұндағы x осы теңдеуді қанағаттандыратын кез келген (әлі белгісіз!) санның аты. Ал $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ тепе-теңдігінде x айнымалысы – кез келген нақты санның атын ауыстырып тұр.

Бұл мысалдардағы және басқа да жағдайлардағы кездесетін айнымалыларды өзіндік мағынасынан оқшаулатып, оны **пәндік айнымалы** немесе жай ғана **айнымалы** деп атаймыз. Бұдан былай осы атау кездесетін барлық индексті немесе индекссіз айнымалылар үшін ортақ болады.

Біз аксиоматикалық теорияларды зерттеу барысында айнымалылармен қатар **тұрақтыларды** (пәндік тұрақтыларды) кеңінен қолданамыз. Тұрақтылар сөйлемдегі қандай да бір нысандардың нақты аты ретінде қолданылады. Мысалы, «5» пәндік тұрақты, ол 5 санының атының орнына қолданылады. Сонымен бірге «Майқы би» сөзі де тұрақты болады. «с: =

«Майқы би» ауыстыруы арқылы «Түгел сөздің түбі бір, түп атасы – Майқы би» сөйлемін – символды түрде "Түгел сөздің түбі бір, түп атасы – **c**" түрінде жазып алып, мұндағы **c** тұрақтысын басқаша интерпретациялау арқылы мүлдем өзге пікірді аламыз. Осында сөз болған айнымалылар мен тұрақтылар ең қарапайым термдердің мысалдары. Терм ұғымын өз кезегінде қажетті дәлдікпен анықтаймыз.

Енді предикат ұғымына көшейік. Табиғи тілдер грамматикасында, предикат ұғымы – сөйлемдегі баяндауышты білдіреді. Яғни, оның қызметі – сөйлемдегі зат есімнің қасиеті жөнінде мәлімет беру. Математикалық логикада предикат ұғымының қолдану аясы бұдан гөрі кеңірек.. Мысалы, "x жай сан" ұғымы бір ғана пікірді білдірмейді. Бұл сөйлем x айнымалысының әрбір мәніне сәйкес жаңа пікір тудырады. Осы тұрғыдан, құрамындағы айнымалының әрбір мәніне сәйкес жаңа пікір білдіретін $R(x)$ өрнегін бір орынды предикат деп атаймыз. Ал

« Олжас Саниядан кіші»,

« **a** саны **b** санына бөлінеді»,

« **w** саны **u** және **v** сандарының қосындысы »

сөйлемдерінің алғашқы екеуі екі орынды, соңғысы үш орынды предикаттардың мысалдары болады. Жалпы жағдайда, **n** орынды предикат деп, құрамындағы $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалыларына нақты мәндер бергенде, пікірге айналатын $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ өрнегін түсінеміз.

Енді квантор ұғымын талдайық. "Елжас магистратурада оқиды" пікірі "x магистратурада оқиды" өрнегінен: «**x: = Елжас**» ауыстыруы арқылы алынған. Егер осы $M(x)$ предикатының алдына «Кез келген x » өрнегін қосып жазсақ,

«Кез келген x магистратурада оқиды»

немесе сол мағынаны білдіретін

«Барлық x магистратурада оқиды »

немесе

«Әрбір x магистратурада оқиды»

пікірлерін аламыз. Осы мысалдардағы бір мағынаны білдіретін "Кез келген x", "Барлық x" немесе "Әрбір x" өрнектері *жалпылау кванторы* деп аталады.

Белгілеуі: $(\forall x)$ немесе жақшасыз $\forall x$.

Онда жоғарыдағы сөйлем символдық түрде

$(\forall x)M(x)$ немесе жақшасыз $\forall xM(x)$ түрінде жазылады.

Егер жоғарыдағы $M(x)$ предикатына "... орындалатындай x табылады" өрнегін қоссақ, онда

" Магистратурада оқитын x табылады"

немесе осымен мағыналас

" Кейбір x магистратурада оқиды"

пікірлерін аламыз.

Осы мысалдардағы "... орындалатындай x табылады" немесе " Кейбір x ..." өрнектерін *табылу кванторы* деп атаймыз.

Белгілеуі: $(\exists x)$ немесе жақшасыз $\exists x$. Мұндағы x айнымалысының орнына кез келген басқа айнымалы қойылуы мүмкін.

Онда жоғарыдағы пікірлер

$(\exists x)M(x)$ немесе жақшасыз $\exists xM(x)$ түрінде жазылады.

Жалпы кванторлар әрқашан белгілі бір айнымалының алдына ілінген түрде ғана кездеседі. Өйткені оның қай айнымалы туралы айтып отырғаны анық болуы тиіс.

Осы айтылған түсініктемелерді ескеріп, төмендегі пікірлерді символды түрде жазайық.

“Барлық натурал сан рационал сан болады.”

“Ешбір натурал сан рационал сан болмайды.”

“Кейбір натурал сан рационал сан болады.”

“Кейбір натурал сан рационал сан болмайды.”

Егер $N(x)$ предикаты « x – натурал сан», ал $Q(x)$ предикаты « x – рационал сан» сөйлемдерін білдірсе, жоғарыдағы пікірлерді символды түрде төмендегідей жазамыз.

$\forall x(N(x) \rightarrow Q(x));$

$\forall x(N(x) \rightarrow \neg Q(x));$

$\exists x(N(x) \wedge Q(x));$

$\exists x(N(x) \wedge \neg Q(x));$

Енді предикаттар логикасының мүмкіндіктерін толық көрсету үшін осы және басқа да қажетті ұғымдардың дәл анықтамаларын беруіміз керек. Алдымен предикаттар логикасының тілінен бастаймыз.

Предикаттар логикасының тілі.

Табиғи тілдер сияқты, кез келген пәндік тілдер де алфавиттен, тыныс белгілерінен және осы тілдегі мағыналы сөздер мен сөйлемдерді құрастыру ережелерінен тұрады. Предикаттар логикасының тілі математикалық теорияларда кездесетін өрнектердің мәндерін табу мен сөйлемдердің ақиқаттығын зерттеу құралы болғандықтан, оның алфавитінде осы ұғымдарды жеткізуге арналған символдар жеткілікті болуы керек. Атап айтқанда, предикаттар логикасының тілі – тұрақтылар мен айнымалыларды, функциялар мен предикаттар символдарын, кванторларды, логикалық амалдарды және қажетті қосымша символдар – тыныс белгілерін қамтуға тиіс. Предикаттар логикасы осы алфавит негізінде математикалық өрнектер мәнін анықтауға және пәннің әртүрлі нысандары арасындағы байланыстардың орындалу жағдайларын зерттеуге қажетті құралдарға толығымен ие.

Осы мақсатта, $\Sigma = V \cup C \cup Pr \cup Fn \cup Log \cup Qu \cup D$ алфавитін қарастырайық.

Мұндағы

$V = \{x, y, z, v, u, \dots\}$ – айнымалылар символдары жиыны;

$C = \{c_0, c_1, \dots\}$ – тұрақтылар жиыны;

$Pr = \{P_i^{n_i} \mid n_i \in N\}$ – предикаттық символдар жиыны; жоғарғы индекс предикаттық символдың неше орынды екендігін көрсетеді.

$Fn = \{f_j^{m_j} \mid m_j \in N\}$ – функционалдық символдар жиыны; жоғарғы индекс функционалдық символдың неше орынды екендігін көрсетеді.

$\text{Log} = \{ \wedge \text{ немесе } \& \text{ (конъюнкция)}, \vee \text{ (дизъюнкция)}, \rightarrow \text{ (импликация)}, \neg \text{ (терістеу)}, \leftrightarrow \text{ (эквиваленттік)} \}$ – логикалық амалдар жиыны;

$\text{Qu} = \{ \forall \text{ (жалпылау)}, \exists \text{ (табылу)} \}$ – кванторлар жиыны;

$\text{D} = \{ \text{сол жақша, оң жақша, үтір} \}$ – қосымша символдар жиыны;

Σ алфавитінің символдарының кез келген шектелген тізбегі предикаттар логикасының сөзі деп аталады. Ішкі сөз ұғымын, символды немесе сөзді сөзбен ауыстыру ұғымдарын біз анықтағанбыз.

Предикаттық, функционалдық және тұрақтылар символдарының қандай да бір жиыны берілсе, оны сигнатура деп атап, σ арқылы белгілейміз.

Енді қандай да бір σ сингнатурасын белгілеп, осы сингнатураның **термі, атомдық формуласы және формуласы** ұғымындарын анықтайық.

Анықтама.

1. Кез келген тұрақтылар мен айнымалылар символдары терм болады.
2. Егер $t_1, \dots, t_m$ – терм, f^m – m орынды функционалдық символ болса, онда $f^m(t_1, \dots, t_m)$ сөзі терм болады.
3. Әрбір терм жоғарыдағы ережелерді ақырлы рет қолдану арқылы құрылады.

Мысалы, v айнымалы символы мен f^1 – 1 орынды функционалдық символынан ғана тұратын барлық термдер тізімі мынандай:

$v, f^1(v), f^1(f^1(v)), \dots, f^1(\dots f^1(v) \dots), \dots$

Ал g^2 – екі орынды, f^1 – бір орынды функционалдық символдар үшін, $g^2(f^1(x, y))$ және $f^1(g^2(v))$ сөздері термдер болмайды. өйткені бұл екі сөздегі функционалдық символдардың орын сандары бұзылып тұр.

Ескерту. Анықтама бойынша термдер құруға предикат символдары қолданылмайды. Демек предикат символы қатысқан ешбір сөз терм болмайды.

Термдердің қасиеттерін термнің күрделілігі бойынша индукцияны пайдаланып дәлелдеу.

Жоғарыдағы анықтама термдердің күрделілігі бойынша индукцияға құрылған. Сондықтан, термдердің қандай да бір P қасиетін индукция арқылы дәлелдеу келесі тәртіппен жүреді.

- Тұрақтылар үшін P қасиетінің орындалатынын тексереміз.
- Айнымалылар үшін P қасиетінің орындалатынын тексереміз.
- Алдыңғы тексерістер оң нәтиже берсін. Онда егер f^m – кез келген m орынды функционалдық символ, ал $t_1, \dots, t_m$ – P қасиеті орындалатынын термдер болса, онда $f^m(t_1, \dots, t_m)$ термі үшін P қасиетінің орындалатынын тексереміз.
- Егер P қасиеті осы үш шарттың барлығын қанағаттандырса, онда P қасиеті берілген тілдің барлық термдері үшін орындалады.

Анықтама.

1. Егер t_1, t_2 термдер болса, онда $t_1 = t_2$ сөзі атомдық формула болады.
2. Егер $t_1, \dots, t_n$ – термдер, P^n – n орынды предикаттық символ болса, онда $P^n(t_1, \dots, t_n)$ сөзі атомдық формула болады.
3. Басқа атомдық формула жоқ.

Мысалы, егер P^2 екі орынды предикаттық символ, ал f^1 бір орынды функционалдық символ болса, онда

$P^2(v, v), P^2(v, f^1(v)), P^2(f^1(v), f^1(f^1(v))), v = v, f^1(v) = v$ сөздерінің әрқайсысы атомдық формуланың мысалдары болады.

Анықтама. Берілген σ сингнатурасының формуласы келесі тәртіппен анықталады.

1. Әрбір атомдық формула формула болады.
2. Егер φ және ψ формулалар болса, онда $(\neg \varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)$ және $(\varphi \rightarrow \psi)$ сөздері формула болады.

3. Егер φ – формула, ал v – айнымалы символы болса, онда $\forall v\varphi$ және $\exists v\varphi$ сөздері формула болады. Мұндағы φ формуласы сәйкес $\forall v$ және $\exists v$ кванторларының **әсер аймағы** деп аталады.
4. Кез келген σ сигнатурасының формуласы жоғарыдағы ережелерді ақырлы рет қолдану арқылы құрылады.

Анықтама. Бос айнымалысыз формула **сөйлем** деп аталады.

$\forall v\exists xP^2(v,x)$ және $\exists v(\forall y\forall x(P^2(v,f^1(y))\rightarrow\neg P^2(v,x))\wedge\neg P^2(v,v))$ формулалары сөйлем мысалдары болады.

Мысалдар.

- $P^2(v,v), \neg P^2(f^1(v),v), \forall v\neg P^2(v,v),$
- $\forall x\exists z((P^2(f^1(x),z))\wedge\exists vQ^2(v,z))\rightarrow\exists yQ^2(x,y)$
- $\exists x\forall y P^2(x,f^1(y))\rightarrow\neg P^2(v,x)$

сөздері формулалар болады. Ал $\neg P^2(f^1(v),v)\rightarrow\exists Q^2(x,y)$ және $\forall v f^1(P^2(v,v))$ сөздері формула болмайды, өйткені бірінші сөздегі квантор қайсы айнымалыға қолданылып тұрғаны көрсетілмеген, ал екінші сөздегі функционалдық символ предикатқа қолданылып тұр.

Ескерту. Предикаттар логикасының формуласында кездесетін жақшаларды орналастыру тәртібі пікірлер логикасындағы келсімімізге сай келеді.

Формулаларды дұрыс оқи білгеннің маңызы зор. Мысалы, жоғарыдағы

$\forall x\exists z(P^2(f^1(x),z)\wedge\exists vQ^2(v,z))\rightarrow\exists yQ^2(x,y)$ формуласының оқылуын келтірейік: "Кез келген x үшін z табылып, егер $P^2(f^1(x),z)$ және $Q^2(v,z)$ болатындай v табылса, онда $Q^2(x,y)$ болатындай y табылады".

Егер v айнымалысы φ формуласының ішінде $\exists v$ немесе $\forall v$ кванторларының әсер аймағында кездессе, онда v айнымалысын φ формуласында сәйкес $\exists v$ немесе $\forall v$ кванторымен **байланған** айнымалы деп айтамыз, кері жағдайда v айнымалысы **бос** айнымалы деп аталады. Осы анықтамадан қандай да бір формулада айнымалының бір мезгілде әрі бос, әрі байланған болып кездесуі мүмкін екенін көреміз.

Мысалдар.

- $\exists vP^2(v,v)\rightarrow\forall yP^2(y,v)$ формуласында v айнымалысы әрі байланған, әрі бос айнымалы болып кездесіп тұр.
- $\exists v\forall y(P^2(v,f^1(y))\rightarrow\neg P^2(v,x))\wedge\neg P^2(v,v)$ формуласында x – бос айнымалы, ал y – байланған айнымалы, ал v айнымалысы әрі бос, әрі байланған күйінде кездеседі.

Бос және байланған айнымалылар формулаларда әртүрлі қызмет атқарады. Мысалы, натурал сандар жиынында анықталған үш орынды $S(x,y,z)$ қатынасы $S(x,y,z) = a \Leftrightarrow x+y = z$ шартымен анықталсын. Онда, $S(3,5,3) = ж$, $S(3,2,5) = а$, $S(2,1,0) = ж$. Егер осы өрнектерге y айнымалысын енгізіп, ол өрнектердегі y айнымалысын $\exists yS(x,y,z)$ жолымен байласақ, $\exists yS(3,y,3) = а$, $\exists yS(3,y,5) = а$, $\exists yS(2,y,0) = ж$ болатынын көреміз. Бұл мысалдан қолданылған квантор атомдық формуланың ақиқаттық мәндеріне тікелей әсер ететінін көреміз. Шындығында да, келтірілген $\exists yS(x,y,z)$ формуласы $x \leq z$ қатынасын білдіреді. Осы мысалдан кез келген формула тек онда кездесетін **бос айнымалылардың арасындағы байланыстарды ғана білдіретінін** байқауға болады. Мысалы $\exists yS(v,y,z)$ формуласының орнына $\exists xS(v,x,z)$ формуласын алсақ, онда бұл формулалар бір мағынаны білдіреді.

Түйіндеп айтсақ, байланған айнымалының формуладағы барлық кездесулерін байлаушы квантордың әсер аймағында берілген формулада кездеспейтін кез келген басқа айнымалыға бір мезгілде ауыстырсақ, формуланың мағынасы өзгермейді. Мысалы, $\exists yS(v,y,z)$, $\exists uS(v,u,z)$, $\exists tS(v,t,z)$ формулалары бір ғана $v \leq z$ қатынасын білдіреді.

Ескерту. Байланған айнымалыны ауыстырғанда берілген формуланың кез келген ішкі формуласындағы ешбір бос айнымалы ауыстырудан кейін квантор арқылы байланбауға тиіс.

Мысалы, $v \leq z$ қатынасын білдіретін $\exists y S(v, y, z)$ формуласын қарастырайық. Осы формуладағы y айнымалысын v айнымалысымен ауыстырсақ, $\exists v S(v, v, z)$ формуласын аламыз. Ал бұл формула z санының жұп болатындығын білдіреді. Сондықтан, жоғарыдағы ескерту байланған айнымалылардың атын өзгерту кезінде мұқияттылықты сақтау туралы айтады.

Жаттығу. Айтылған жағдайларды ескеріп, $\forall z (P(z) \wedge \exists x Q(x, z) \rightarrow \exists y R(z, y)) \vee \neg Q(z, x)$ формуласындағы айнымалыларды ауыстыру жолымен, оның мағынасының өзгеруінің бірнеше нұсқасын келтіріңіз.

Енді айнымалыны терммен ауыстыру мүмкіндігін қарастырайық. Біз айнымалыны терммен ауыстырдық дегенде, осы айнымалының берілген формуладағы барлық кездесулерін таңдалған терммен бір мезгілде ауыстыру арқылы алынған жаңа формуланы түсінеміз.

Мысал.

Екі орынды f функционалдық символы үшін $f(x, y)$ термі натурал сандарды көбейтуді білдірсін. Яғни $f(x, y) = z \Leftrightarrow x \cdot y = z$.

Егер жоғарыда келтірілген $\exists y S(v, y, z)$ формуласындағы v айнымалысын $t = xy$ термімен ауыстырсақ, $\exists y S(t, y, z)$ формуласын аламыз. Бұл формула $xy + y = z$ қатынасын білдіреді. Оның $v \leq z$ қатынасынан мағынасы өзгеше болатыны түсінікті. Демек айнымалыны терммен келтірілген жолмен ауыстыруға болмайды. Осындай жағдайларды болдырмау үшін төмендегідей ұғым енгізейік.

Анықтама. Егер v айнымалысының φ формуласындағы ешбір кездесуі, t термінің кез келген y айнымалысы үшін $\exists y$ немесе $\forall y$ кванторларының әсер аймағында болмаса, онда ***t* термі φ формуласындағы v айнымалысы үшін бос деп аталады.**

Қорыта айтсақ, формуладағы v айнымалысын қандай да бір t термімен ауыстыру үшін t термі φ формуласында v айнымалысы үшін бос болуы керек.

Әдетте жоғарыдағы ескертуді айналып өту мүмкін болмаса, алдымен формуладағы байланған айнымалының атын өзгертіп алып, аталған айнымалыны терммен ауыстырамыз. Мысалы $t = xy$ термін v айнымалысының орнына қою үшін $\exists y S(v, y, z)$ формуласында y айнымалысының атын u айнымалысымен ауыстырсақ, бастапқы формулаға парапар $\exists u S(v, u, z)$ формуласын аламыз. Ал бұл формулада t термі v айнымалысы үшін бос болады. Яғни, $\exists u S(t, u, z)$ формуласы бастапқы $\exists u S(v, u, z)$ формуласынан заңды ауыстыру арқылы алынған болып шығады.

Мысалдар.

- $P^2(v, y) \rightarrow \neg \exists y P^2(y, y)$ формуласындағы v айнымалысы үшін $t = f^1(x)$ термі бос.
- $\neg P^2(f^1(x), y) \rightarrow \exists y P^2(x, y)$ формуласындағы x айнымалысы үшін $t = y$ термі бос болмайды.

Анықтама. Өзі де формула болатын ішкі сөзді ***ішкі формула*** деп айтамыз.

Мысал.

$\neg P^2(f^1(x), y) \rightarrow \neg \forall v P^2(x, f^1(y)) = \varphi$ формуласының ішкі формулалары мыналар:
 $P^2(f^1(x), y)$, $P^2(x, f^1(y))$, $\forall v P^2(x, f^1(y))$, $\neg P^2(f^1(x), y)$, $\neg \forall v P^2(x, f^1(y))$, φ