

Тақырыбы. Муавр-Лапластың локалді және интегралды формулалары

Муавр-Лапластың локалді формуласы. Егер Бернулли схемасында n жүргізілетін тәжірибиелер санымен қатар p, q ықтималдықтары да айтарлықтай «үлкен» болса, яғни Бернулли немесе Пуассон жуықтау формуласын қолданып есептеу қолайсыз болса, онда ұтыс санының дәл k рет болу ықтималдығы

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (11.1)$$

формуласымен анықталады. Мұндағы

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

стандартты нормалды (гаусстық) үлестіру тығыздығы деп, ал (11.1) жуық теңдігі *Муавр-Лапластың локалді формуласы* деп аталады (φ функциясының кейбір мәндері 1-қосымшада берілген). Аргументтің теріс мәндері үшін функцияның жұптылығы қолданылады.

Муавр-Лапластың интегралды формуласы. Егер Бернулли схемасында n жүргізілетін тәжірибиелер санымен қатар p, q ықтималдықтары да үлкен болса, онда ұтыстар саны k_1 санынан кем емес, k_2 санынан артық емес орындалуының ықтималдығы үшін

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

жуықтау формуласы орындалады. Мұндағы

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Φ функциясы стандартты нормал (гаусстық) үлестірім функциясы. Бұл *Муавр-Лаплас*тың *интегралды формуласы* деп аталады.

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

функциясы *Лаплас интегралы* деп аталады.

Φ_0 функциясының кейбір мәндері 2-қосымшада берілген. Аргументтің теріс мәндері үшін Φ_0 функцияның мәнін анықтауда оның тақтығы қолданылады, яғни

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x),$$

сонымен қатар $\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$ теңдігі орындалады.

Лаплас интегралын қолданып, Муавр-Лапласың интегралды формуласын келесі түрде жазуға болады

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1).$$

Тәжірибені n рет жүргізгенде ұтыстың k рет пайда болу ықтималдығын жуықтап есептеуге мүмкіндік беретін Пуассон, Муавр-Лаплас формулаларын қолдану бойынша келесідей ұсыныс беруге болады.

Егер n тәжірибелер саны 10 мен 20 арасында болса, онда бұл формулалар шешім нақты емес, үлкен қателікпен жарайтын жағдайда қолданылады (нақтырақ қажет болғанда, әрине, Бернулли формуласы бойынша есептеген дұрыс). Пуассон формуласы $n = 10$ үшін $\lambda = np$ немесе $\lambda' = nq$ шамалары 0 мен 2 арасында, ал $n = 20$ үшін 0 мен 3 арасында болған жағдайда қолданылады.

Қалған жағдайларда Муавр-Лаплас формулаларын қолданған жөн.

n тәжірибелер саны 20 мен 100 арасында болса, онда жуықтау формулаларын қолданбалы инжерелік есептеулер үшін де пайдалануға болады. Пуассон формуласын λ немесе λ' шамалары 0 мен 3 арасында ($n = 20$) және 0 мен 7 арасында ($n = 100$) жатқанда қолдану ұсынылады.

Егер n тәжірибелер саны 100 бен 1000 арасында болса, онда негізінен кез келген инженерлік есептеулерде жуықтау формулаларын қолдануға болады. Оның ішінде Пуассон формуласы $n = 100$ үшін λ немесе λ' шамалары 0 мен 7 арасында жатқанда және $n = 1000$ үшін 0 мен 15 аралығында жатқанда қолданылады.

Соңында, $n > 1000$ болғанда, тіпті арнайы кестелер жуықтау формулалары бойынша құрылады (бірақ дәлдікті арттыру үшін қажет жағдайларда арнайы түзетулер қолданылады).

Бұл жағдайда Пуассон формуласын қолдану үшін 1000 тәжірибе жүргізгенде λ немесе λ' шамалары 0 мен 15 аралығында жатуы қажет және n өскен сайын λ шамасының жату аралығы да кеңейеді.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Тәжірибе n рет жүргізілгенде ұтыстың дәл k рет орындалу ықтималдығын есептеудің Муавр-Лапластың локалды формуласын беріңіз.
2. Тәжірибе n рет жүргізілгенде A оқиғасының k_1 санынан кем емес, k_2 санынан артық емес орындалуының ықтималдығын есептеудің Муавр-Лапластың интегралды формуласын беріңіз.
3. Лаплас интегралы неге тең?