

Тақырыбы. Тәжірибелер тізбегінің математикалық моделі. Бернулли схемасы. Бернулли және Пуассон формулалары.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі бір рет жүргізілген тәжірибенің математикалық моделі екені белгілі. Сол себепті тәжірибелер тізбегінің математикалық моделі $(\Omega_1, \sigma F_1, P_1), \dots, (\Omega_n, \sigma F_n, P_n)$ ықтималдық кеңістіктерінің тізбегі ретінде қарастыруға болады.

Әрқайсысында нәтижелер (элементар оқиғалар) саны ақырлы болатын n тәжірибелер тізбегін қарастырайық. Онда сәйкесінше $(\Omega_1, \sigma F_1, P_1), \dots, (\Omega_n, \sigma F_n, P_n)$ ықтималдық кеңістіктерімен сипатталатын n тәжірибелер тізбегін жүргізудің математикалық моделін $(\bar{\Omega}, \sigma \bar{F}, \bar{P})$ арқылы белгілеп, бастапқы n моделдер арқылы өрнектейік

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \{\omega = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}): \omega^{(k)} \in \Omega_k (k = 1, \dots, n)\}, \\ \sigma \bar{F} &= \{A: A \subset \bar{\Omega}\},\end{aligned}\tag{10.1}$$

ал элементар оқиғалар жиыны $\bar{\Omega}$ ақырлы болғандықтан (өйткені әрбір $k (k = 1, \dots, n)$ үшін Ω_k жиындарының әрқайсысы ақырлы) P ықтималдығын құру үшін $\bar{\Omega}$ жиынының бір элементті жиыншаларында $\{\omega\} \mapsto \bar{P}(\{\omega\}) = \bar{P}(\{(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)})\})$ теріс емес функциясын

$$\sum_{\omega \in \bar{\Omega}} \bar{P}(\{\omega\}) = \sum_{(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n} \bar{P}(\{(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)})\}) = 1$$

теңдігі орындалатындай түрде құрса жеткілікті. Егер тәжірибелер тізбегі тәуелсіз болса, онда оқиғалар тәуелсіздігіне сүйене отырып, P ықтималдығын

$$\bar{P}(\{(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)})\}) = \bar{P}(\{\omega^{(1)}\}) \times \dots \times \bar{P}(\{\omega^{(n)}\})$$

теңдігі бойынша анықтаймыз, ал $(\bar{\Omega}, \sigma\bar{F}, \bar{P})$ үштігіндегі $\bar{\Omega}$ элементар оқиғалар жиыны мен $\sigma\bar{F}$ оқиғалар сигма алгебрасы (10.1) формуладағыдай анықталады.

Егер тәжірибелер тізбегі бірдей шарт орындалғанда жүргізілетін болса, яғни

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dots = \Omega_n = \Omega, \\ \sigma F_1 &= \dots = \sigma F_n = \sigma F, \\ P_1 &= \dots = P_n = P\end{aligned}$$

болса, онда тәуелсіз тәжірибелер тізбегінің математикалық моделі $(\Omega^n, \sigma F^n, P^n)$ арқылы белгіленеді.

Енді бірдей шарт орындалғанда жүргізілетін тәуелсіз тәжірибелер тізбегінің математикалық моделінің *Бернулли схемасы* деп аталатын дербес жағдайына көшейік.

Анықтама 10.1. Әрқайсысында p ($0 < p < 1$) ықтималдықпен 1 (ұтыс) және $q = 1 - p$ ықтималдықпен 0 (ұтылыс) болатын, яғни

$$\Omega = \{0, 1\}, \sigma F = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$$

және

$$\begin{aligned}P(\{1\}) &= p, & P(\{0\}) &= q, & p + q &= 1, \\ & & 0 < p, q < 1\end{aligned}$$

шарттарын қанағаттандыратын $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістіктерімен берілген n рет қайталанатын тәуелсіз тәжірибелердің тізбегі *Бернулли схемасы* деп аталады да, оның математикалық моделі

$$(\Omega^n, \sigma F^n, P^n)$$

арқылы белгіленеді. Мұндағы

$$\Omega^n = \{\omega = (a_1, \dots, a_n): a_k \in \{0,1\}(k = 1,2,\dots,n)\}, \sigma F^n$$

$$= \{A : A \subset \Omega^n\}$$

және

$$P(\{(a_1, \dots, a_n)\}) = p^{\sum_{k=1}^n a_k} q^{n - \sum_{k=1}^n a_k}.$$

Бернулли формуласы. Бернулли схемасында n тәжірибе жүргізген кезде дәл $k(k \leq n, k = 0,1, \dots)$ рет ұтыс болуын білдіретін оқиғаның орындалуының $P_n(k)$ ықтималдығы

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k}$$

формуласымен анықталады. Бұл *Бернулли формуласы* деп аталады.

Өртүрлі шарттар орындалғанда n тәуелсіз тәжірибелер тізбегі жүргізілсін. k - қадамда A оқиғасының орындалуының ықтималдығы $p_k (0 < p_k < 1)$ санына тең болсын. n тәжірибе жүргізгенде A оқиғасының дәл m рет орындалуының $P_{n,m} = P_n(k = m)$ ықтималдығы ($q_k = 1 - p_k$)

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (q_k + p_k x)$$

туындатушы функциясының x айнымалысының m -ші дәрежелі қосылғышының алдындағы коэффициентке тең.

Бір тәжірибеде $1,2, \dots, m$ болатын m мүмкін нәтиже болсын. Және тәжірибе нәтижесінде $\{i\}$ оқиғасының шығу ықтималдығы $p_i (p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1)$.

$P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ арқылы $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ тәуелсіз тәжірибелер жүргізгенде бірінші нәтиженің n_1 рет, екінші нәтиженің n_2 рет, т.с.с., m -нәтиженің n_m рет орындалу ықтималдылығын белгілейік.

Теорема 10.1 (Полиномиалды схема - Бернулли схемасының жалпылауы). *Кез келген оң бүтін n және қосындылары n санына тең теріс емес $n_1, n_2, \dots, n_m$ сандары үшін*

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_m} = n! \prod_{j=1}^k \frac{p_j^{n_j}}{n_j!}$$

теңдігі орындалады.

Пуассон формуласы. Бернулли схемасында тәжірибиелер саны «көп», ал әрқайсысында оқиғаның орындалу ықтималдығы p ($0 < p < 1$) «аз», сонымен қатар $\lambda = np$ саны да «аз» болса, Пуассонның жуықтап есептеу формуласын қолданамыз. Пуассонның жуықтау формуласын алу үшін $\{(\Omega^n, \sigma F^n, P^n)\}_{n=1}^{\infty}$ Бернулли схемаларының тізбегін қарастырайық. Мұнда бір $(\Omega^{n'}, \sigma F^{n'}, P^{n'})$ схема шеңберінде n' тәжірибедегі $p_{n'}$ ұтыс ықтималдығы өзгермегенімен, әртүрлі n үшін $(\Omega^n, \sigma F^n, P^n)$ схемаларындағы p_n ұтыс ықтималдықтары әртүрлі болып, $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ тізбегінің шегі нөлге ұмтылады.

Ескерту 10.1. Бөлек алынған сан аз да, көп те бола алмайды. Дегенмен, осы және келесі сабақтарда берілетін жуықтау формулаларын тәжірибелер саны мен ұтыс ықтималдығының «аз», «көп» жағдайларына қарай қай уақытта қайсысы қолданатындығының ұсынысы беріледі.

Теорема 10.2 (Пуассон формуласы). $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$ орындалғанда $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$ болатындай $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ тізбегі және теріс емес k бүтін саны берілсін. Онда Бернулли схемасындағы n тәжірибеде p_n ықтималдықпен k рет ұтыстың пайда болу ықтималдығы $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ұмтылады, яғни

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Теорема 10.3. *А-қандай да бір теріс емес бүтін сандар жиыны, ал $v_n - p$ ықтималдықты Бернулли схемасындағы n тәжірибедегі ұтыстар саны және $\lambda = np$ болсын. Онда*

$$\begin{aligned} & \left| P(\{v_n \in A\}) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \\ &= \left| \sum_{k \in A} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq np^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{n} \end{aligned}$$

теңсіздігі орындалады, мұндағы $P(\{v_n \in A\}) = \sum_{k \in A} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Әрқайсысында нәтижелер саны ақырлы болатын тәжірибелердің ақырлы тізбегінің барлық элементар оқиғалар жиынын құрыңыз.
2. Әрқайсысында нәтижелер саны ақырлы болатын тәжірибелердің ақырлы тізбегі үшін оқиғалар алгебрасын құрыңыз және онда ықтималдықты анықтаңыз.
3. Егер тәжірибелер тізбегі тәуелсіз болса, әрқайсысында нәтижелер саны ақырлы болатын тәжірибелердің ақырлы тізбегі үшін математикалық модель қалай өзгереді.
4. Нәтижелер саны ақырлы болатын тәжірибе тәуелсіз n рет жүргізілгенде пайда болатын тәжірибелердің ақырлы тізбегінің моделін толық сипаттаңыз.
5. Нәтижелер саны ақырлы болатын тәжірибе тәуелсіз n рет жүргізілгенде пайда болатын тәжірибелердің ақырлы тізбегі моделінің мысалы болатын Бернулли схемасын сипаттаңыз.

6. Бернулли схемасы бойынша тәжірибе n рет жүргізілгенде A оқиғасының дәл k рет орындалу ықтималдығы неге тең?
7. Бернулли схемасының жалпылауы болатын полиномиалды схеманы көрсетіңіз.
8. Бернулли схемасы бойынша тәжірибе n рет жүргізілгенде A оқиғасының дәл k рет орындалу ықтималдығын жуықтап есептеудің Пуассон формуласын өрнектеңіз?
9. Пуассон формуласы қай уақытта қолданылады?