

Тақырыбы. Екі оқиғаның тәуелсіздігі, оқиғалардың ақырлы санының тәуелсіздігі

Анықтама 9.1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен A, B ($P(B) > 0$) оқиғалары берілсін. Егер

$$P(A|B) = P(A)$$

болса, онда A оқиғасы B оқиғасына *тәуелсіз* деп аталады.

Теорема 9.1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен $P(A) > 0$ және $P(B) > 0$ шарттарын қанағаттандыратын A, B оқиғалары берілсін. A оқиғасы B оқиғасына тәуелсіз болса, онда B оқиғасы да A оқиғасына тәуелсіз болады.

Ескерту 9.1. Бұл теоремадан екі оқиғаның тәуелсіздігі анықтамасында қай оқиға қайсысына тәуелсіз екендігін нақтылау маңызды емес екендігін көреміз.

Анықтама 9.2 (екі оқиғаның тәуелсіздігі). $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен A, B оқиғалары берілсін. Егер

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (9.1)$$

болса, онда A және B оқиғалары *тәуелсіз* немесе *статистикалық тәуелсіз* деп аталады.

Бұл теңдік орындалмаған жағдайда A және B оқиғалары тәуелсіз емес (тәуелді) оқиғалар болып табылады.

Ескерту 9.2. Берілген екі оқиға тәуелсіздігінің 9.1 және 9.2 анықтамалары $P(A) > 0$ және $P(B) > 0$ болғанда өзара пара-пар, яғни екі оқиға осы анықтамалардың бірі бойыша тәуелсіз болса, онда екіншісі бойынша да тәуелсіздік шартын қанағаттандырады.

Ескерту 9.3. 9.2 анықтамасында $P(A) > 0$ және $P(B) > 0$ шарттары қойылмайды, яғни бұл анықтама бойынша A және B оқиғаларының кемінде бірінің ықтималдығы нөлге тең болса, онда (9.1) теңдігінің сол жағы да нөлге тең болғандықтан, (9.1) теңдігі бұл жағдайда да орындалады. Сол себепті оқиғалар тәуелсіздігінің 9.2-анықтамасы A және B оқиғаларының

кемінде бірінің ықтималдығы нөлге тең болғанда да қабылданады.

Анықтама 9.3 (оқиғалардың ақырлы санының жаппай тәуелсіздігі). $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары берілсін. Егер кез келген $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n, 2 \leq m \leq n$ шарттарын қанағаттандыратын $i_1, i_2, \dots, i_m$ бүтін сандары үшін

$$\begin{aligned} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \\ = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_m}) \end{aligned} \quad (9.2)$$

теңдіктері орындалса, онда $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары *жаппай тәуелсіз* деп аталады.

Ал осы шарттарды қанағаттандыратын ең болмағанда бір комбинация үшін бұл теңдік орындалмаса, яғни (9.2) теңдігін қанағаттандырмайтын $i'_1, i'_2, \dots, i'_{m'}$ ($1 \leq i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{m'} \leq n, 2 \leq m' \leq n$) нөмірлері табылса, онда $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары жаппай тәуелсіз болмайды.

Теорема 9.2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары тәуелсіз болса және кез келген өзара тең емес $\{1, 2, \dots, n\}$ жиынынан алынған $i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s$ нөмірлері үшін $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) > 0$ болса, онда

$$P(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_s} | A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) = P(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_s}).$$

Анықтама 9.4 (оқиғалардың қос-қостан тәуелсіздігі). $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары берілсін. Егер кез келген i, j ($1 \leq i < j \leq n$) үшін

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

теңдігі орындалса, онда $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары *қос-қостан тәуелсіз* деп аталады.

Ескерту 9.3. Жаппай тәуелсіздіктен қос-қостан тәуелсіздік шығады. Бірақ, қос-қостан тәуелсіздіктен жаппай тәуелсіздік шыға бермейді.

Қос-қостан тәуелсіз, бірақ жаппай тәуелсіз емес оқиғалар мысалы келтірілген.

Оқиғалардың тәуелсіздігі мен Колмогоров аксиомалары кейбір қолданбалы есептерді шығаруда тікелей пайдаланылады. Мысалы, $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының ең болмағанда біреуінің орындалуының ықтималдығын табу керек болсын, ол әрине мағынасы бойынша бұл оқиғалардың біреуінің, екеуінің, т.с.с. барлығының орындалуының ықтималдықтарының қосындысына тең. Оқиғалардың саны неғұрлым көп болған сайын есептеу көлемі де көбейе түсетіндігі белгілі, сондықтан Колмогоров аксиомаларының 1-салдары $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ бойынша ізделінді оқиғаға қарама-қарсы оқиға – $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының ешқайсысының орындалмауының ықтималдығын тауып, оған салдарды қолдану есептеу көлемін қысқартып, қажетті ықтималдықты табуды жеңілдетеді, яғни $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының орындалу ықтималдықтары сәйкес $p_1, p_2, \dots, p_n$ болса, олардың орындалмауларының ықтималдығы тағы да 1-салдар бойынша сәйкесінше $1 - p_1, 1 - p_2, \dots, 1 - p_n$ сандарына тең, онда олардың ең болмағанда біреуінің орындалуының ықтималдығы

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \\ = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \cdot \dots \cdot (1 - p_n)$$

санына тең.

Сонымен, $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының әрқайсысының орындалу ықтималдығы p . Ең болмағанда біреуінің орындалуының P санынан кем емес болуы үшін оқиғалар саны

$$n \geq \frac{\lg(1 + P)}{\lg(1 + p)}$$

теңсіздігін қанағаттандыруы қажет.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. A оқиғасының B оқиғасына тәуелсіздігінің анықтамасын беріңіз?
2. Егер A оқиғасы B оқиғасына тәуелсіз болса, онда B оқиғасы A оқиғасына тәуелсіз бола ма?
3. Ықтималдықтарды көбейту формуласы арқылы берілетін A және B оқиғаларының тәуелсіздігінің анықтамасын беріңіз?
4. Келтірілген оқиғалар тәуелсіздігінің екі анықтамасы эквивалентті ме? Бұл екі анықтама эквивалентті дегеніміз не?
5. A және B оқиғалары тәуелді дегеніміз не?
6. $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in N$) оқиғаларының жаппай тәуелсіздігінің анықтамасын келтіріңіз.
7. $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in N$) оқиғаларының қос-қостан тәуелсіздігінің анықтамасын келтіріңіз.
8. $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in N$) оқиғаларының жаппай тәуелсіздігінен олардың қос-қостан тәуелсіздігі шыға ма?
9. $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in N$) оқиғаларының қос-қостан тәуелсіздігінен олардың жаппай тәуелсіздігі шыға ма?
10. Қос-қостан тәуелсіз, бірақ жаппай тәуелсіз емес оқиғалардың мысалын келтіріңіз.