

Тақырып. Шартты ықтималдық және ықтималдықтың негізгі формулалары

Кейбір тәжірибелерге ықтималдық моделін құрып, оқиғалардың ықтималдығын табу үшін барлық мүмкін элементар оқиғалар кеңістігін емес, оның орнына қандай да бір шартты қанағаттандыратын Ω жиынының белгілі бір оқиғаға дейінгі сығылуы болып табылатын бөлігі үшін модель құру жеткілікті болады. Бұндағы ықтималдық бастапқы моделдегі ықтималдықпен, жалпы ықтималдық кеңістігі де бастапқы ықтималдық кеңістігі негізінде анықталады.

Осы жаңа ықтималдық кеңістігінде $\Omega_H = H, \sigma F_H = \{AH: A \in F\}$ түрінде анықталады, ал P_H ықтималдығы келесі 8.1-анықтамасымен беріледі.

Анықтама 8.1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен $P(H) > 0$ шартын қанағаттандыратын H оқиғасы берілсін. A және H оқиғаларының қиылысу ықтималдығының H оқиғасының ықтималдығына қатынасы, яғни

$$P_H(A) \equiv P(A|H) = \frac{P(AH)}{P(H)} \quad (8.1)$$

саны H оқиғасы орындалғандағы A оқиғасы орындалуының *шартты ықтималдығы* деп аталады да, $P(A|H)$ немесе $P_H(A)$ арқылы белгіленеді.

Ескерту 8.1. (8.1) шартты ықтималдық анықтамасындағы P_H ықтималдығында жазуды күрделендірмеу үшін $AH \in \sigma F_H$ оқиғасының орнына $P_H(A) = P_H(AH)$ теңдігінің орындалуы себепті A жазылады.

Ықтималдықтар теориясының негізгі элементар формулаларына көшелік.

Көбейту формуласы. (8.1) теңдеудің екі жағын $P(H) > 0$ санына көбейтсек, екі оқиға жағдайындағы

$$P(AH) = P(A|H) \cdot P(H)$$

ықтималдықтарды көбейту формуласына келеміз.

Жалпы жағдайда

Теорема 8.1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0$ шартын қанағаттандыратын $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары берілсін, онда оқиғалар үшін көбейту формуласы деп аталатын

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \\ = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}))$$

теңдігі орындалады.

Анықтама 8.2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Өзара қиылыспайтын (үйлесімсіз), бірігуі барлық мүмкін элементар оқиғалар жиыны Ω жиынын беретін, яғни

$$H_i \cap H_j \\ = \emptyset \ (i \\ \neq j) \text{ және } \sum_i H_i = \Omega$$

шарттарын қанағаттандыратын $H_1, H_2, \dots, H_n$ $(H_1, H_2, \dots, H_n, \dots)$ оқиғалары гипотезалар деп аталады.

Толық ықтималдық формуласы.

Теорема 8.2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі, A оқиғасы және $H_1, H_2, \dots, H_n$ (немесе $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$) гипотезалары берілсін. Онда толық ықтималдық формуласы деп аталатын

$$P(A) = \sum_i P(A|H_i)P(H_i)$$

теңдігі орындалады.

Егер гипотезалар саны ақырлы болса, яғни $H_1, H_2, \dots, H_n$ болса, онда толық ықтималдық формуласы келесі түрде жазылады

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \dots + P(A|H_n) \cdot P(H_n).$$

Ал егер олардың саны саналымды болса, онда

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \dots + P(A|H_n) \cdot P(H_n) + \dots$$

Байес формуласы

Теорема 8.3. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі және $P(A) > 0$ мен $P(H) > 0$ шарттарын қанағаттандыратын A және H оқиғалары берілсін. Онда Байес формуласы деп аталатын

$$P(H|A) = \frac{P(H)P(A|H)}{P(A)}$$

теңдігі орындалады.

Жалпы жағдайда, ықтималдықтары нөлге тең емес $H_1, H_2, \dots, H_n$ (немесе $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$) гипотезалары үшін

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_i P(A|H_i) \cdot P(H_i)}, k = 1, 2, \dots, n \quad (k = 1, 2, \dots)$$

теңдіктері орындалады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. A және $P(H) > 0$ болатындай H оқиғалары берілсін. H оқиғасы орындалғандағы A оқиғасының шартты ықтималдығы қалай анықталады?
2. Екі оқиға жағдайындағы ықтималдықтарды көбейту формуласын келтіріңіз.
3. $P(A_1 A_2 \dots A_n) > 0$ шартын қанағаттандыратын $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in N$) оқиғалары үшін көбейту формуласын келтіріңіз.

4. Қандай жағдайда $H_1, H_2, \dots, H_n$ оқиғалары гипотезалар деп аталады?
5. Толық ықтималдық формуласын келтіріңіз
6. Байес формуласын келтіріңіз.
7. Шартты ықтималдық А.Н.Колмогоров аксиомаларын қанағаттандыра ма?