

7 дәріс. Ақиқат кесте бойынша берілген. Буль функциясына формула құру әдісі. Буль функцияларының түйіндістік принципі. Буль функцияларының толық жүйелері. Пост кластары. Пост теоремасы.

Тұжырымдар логикасының әрбір формуласына ақиқат кесте құруға болатынын білеміз. Керісінше қалай?. Керісінше де яғни ақиқат кесте бойынша формула құруға болатынын көреміз.

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	0	...	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	0	...	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	1	...	1	0	$f(1, 1, \dots, 1, 0)$
1	1	1	...	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

2. Осы құрамаларға сәйкес конъюнкция жазамыз. Егер x_i аргументінің құрамадағы мәні 1-ге тең болса ол конъюнкцияға өзгеріссіз енеді, ал $x_i=0$, болса конъюнкцияға оның терістеуі алынады.

3. Алынған барлық конъюнкциялардың дизъюнкциясы іздеген формула болады және ол құрылған функцияның МДКФ-ы болады.

$$\text{Мысалы, } f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_1 (3, 4, 6), f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_1 (0, 2, 5, 7)$$

3,4,6-құрамалардың нөмірлері 0,2,5,7- құрамалардың нөмірлері

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F = (\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3) \quad F = (\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3)$$

Ақиқаттық кесте бойынша МКҚФ құрудың алгоритмі.

Алгоритмді $f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_0 (0, 3, 7)$ функциясына МКҚФ құруға қолданайық.

1. Кестеден функцияны 0-ге айналдыратын аргументтерге сәйкес құрамалар алынады(асты сызылады).

2. Осы құрамаларға сәйкес дизъюнкция жазамыз. Егер x_i аргументінің құрамадағы мәні 0-ге тең болса ол конъюнкцияға өзгеріссіз енеді, ал $x_i=1$, болса конъюнкцияға оның терістеуі алынады.

3. Алынған барлық дизъюнкциялар конъюнкциямен жалғастырылады.

$$F = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \wedge x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Анықтама. Егер $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$ онда $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясына түйіндес функция деп аталады. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясына түйіндес функцияны анықтау үшін, барлық айнымалылар және функцияның өзін оның қарама-қарсы мәндеріне ауыстыру керек.

Мысал. Үш айнымалыдан тәуелді

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \sim x_2)} \rightarrow ((x_1 \vee x_3) \& x_2)$ функциясын буль формуласы яғни МДҚФ-түрінде өрнектеу керек.

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_2$	$x_1 \sim \bar{x}_2$	$x_1 \vee x_3$	$(x_1 \vee x_3) \& x_2$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

Іздеп отырған МДҚФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Түйіндестік принципі: Егер f функциясын өрнектейтін F формуласындағы барлық операция белгілерін түйіндес функцияның операция белгілеріне алмастырғаннан алынған F^* формуласы берілген f функциясының түйіндес функциясын өрнектейтін болады.

Тек $\&$, $\vee$, a , ж символдарымен ғана байланысқан формулаларды қарастырамыз. $\&$, $\vee$, a , ж символдары бір біріне түйіндес деп аталады.

Мысалдар: ақиқат–формуласының түйіндесі - жалған;

$f_1: x \vee \text{ж};$	$f_2: x \wedge \text{ж} \equiv \text{ж};$	$f_3 = x \vee y;$	$f_4 = x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1);$
$f_1^*: x \wedge \text{a};$	$f_2^*: x \vee \text{a} \equiv \text{a};$	$f_3^* = (x \wedge y);$	$f_4^* = x_1 \vee (x_2 \wedge \bar{x}_1);$

Егер f_1 , f_2 функциялары тең болса, онда оларға сәйкес түйіндес формулалар да тең болады. $f_1 = f_2$ онда $f_1^* = f_2^*$. Түйіндестік принцип дизъюнкция, конъюнкция, терістеу арқылы байланысқан формулалармен берілген функциялардың түйіндестерін табу үшін ыңғайлы. Бұл жағдайда берілген формулада конъюнкция дизъюнкцияға, дизъюнкция конъюнкцияға ауысады. Сөйтіп ДҚФ–КҚФ, КҚФ–ДҚФ, МДҚФ–МКҚФ немесе керісінше.

Мысалы: $(xy \vee \bar{x}z \vee \bar{x}y\bar{z})^* = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$

Егер φ формуласы μ -ге эквивалент болса: $\varphi \sim \mu$ онда оларға сәйкес түйіндес формулалар да эквивалентті болады, яғни $\varphi^* \sim \mu^*$ болады.

Егер $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ онда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы өзіне-өзі түйіндес функция деп аталады. Мысалы, $\varphi = xy \vee xz \vee yz$ функциясы өзіне өзі түйіндес функцияны кескіндейді. Оған (b_1, b_2, b_3) және $(1-b_1, 1-b_2, 1-b_3)$ жиынтықтарының қарама-қарсы мәндерінде функция да қарама-қарсы мән қабылдайтындығына көз жеткізуге болады. Ол үшін ақиқаттық кесте құрып:

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
φ	0	0	0	0	0	1	1	1

$$\begin{aligned} \varphi(0,0,0) &= \overline{\varphi(1,1,1)}; & \varphi(0,0,1) &= \overline{\varphi(1,1,0)}; \\ \varphi(0,1,0) &= \overline{\varphi(1,0,1)}; & \varphi(0,1,1) &= \overline{\varphi(1,0,0)} \end{aligned}$$

екендігін көреміз.

Мысал: Түйіндестік принципіне сүйене отыра, буль алгебрасындағы түйіндестік принципінің дұрыстығын дәлелдеу керек. Буль алгебрасында $(P_2; \&, \vee, \neg)$ үш амал бар: $\sum \{\&, \vee, \neg\}$;

Буль алгебрасының әр бір амалына түйіндес амалдарды анықтайық.

а) Айталық, $f(x, y) = x \cdot y$ болсын.

Олай болса $f^*(x, y) = \overline{f(\overline{x}, \overline{y})} = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = x \vee y$;

б) Айталық, $f(x, y) = x \vee y$; Олай болса $f^*(x, y) = \overline{f(\overline{x}, \overline{y})} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}} = x \wedge y$

;

в) Айталық, $f(x) = \overline{x}$; Олай болса $f^*(x) = \overline{f(\overline{x})} = \overline{\overline{\overline{x}}} = x$;

Сонымен конъюнкция дизъюнкцияға, дизъюнкция конъюнкцияға түйіндес, ал терістеу өзіне өзі түйіндес.

Буль функцияларының толық жүйелері. Пост кластары. Пост теоремасы.

Жоғарыда көрсетілгендей, кез келген функцияның МДҚФ түрінде анықталуы мүмкіндігін білдіреді, яғни $\{., \vee, \neg\}$ символдар мен айнымалылардан тұратын формула түріне келтіруге болады. Мұндай $\{., \vee, \neg\}$ операциялар жиыны функционалды толық жүйелер немесе базис деп аталады.

де Морган заңдарына сүйеніп

$$\overline{X \vee Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

табамыз

$$X \vee Y = \overline{\overline{X} \cdot \overline{Y}}$$

осы теңдік ақиқат болған себебінен $\{., \neg\}$ - операциялар жиыны функционалды толық жүйе болады.

$$X \cdot Y = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}$$

осы теңдік ақиқат болған себебінен $\{\vee, \neg\}$ - операциялар жиыны функционалды толық жүйе болады.

Теорема. Егер функционалды толық Σ^* жүйенің барлық функциялары Σ -жүйенің формулалары арқылы өрнектелетін болса, онда Σ -жүйе де функционалды толық жүйе болады.

Очы теоремаға, және келесі теңдіктерге

$$\overline{X} = X \oplus 1$$

X	1	$X \oplus 1$	$\overline{X}$
0	1	1	1
1	1	0	0

X	Y	$X \cdot Y$	$X \vee Y$	$X \oplus Y$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

$$X \vee Y = XY \oplus X \oplus Y$$

$$X \vee Y = \overline{\overline{X} \cdot \overline{Y}} = (X \oplus 1) \cdot (Y \oplus 1) \oplus 1 = XY \oplus X \oplus Y \oplus 1 \oplus 1 = XY \oplus X \oplus Y$$

$$A \oplus A = 0$$

сүйеніп, тағы бір қызықты функционалды толық жүйені табамыз $\{1, X \cdot Y, X \oplus Y\}$. $\{., \oplus, 1\}$ - функционалды толық жүйе.

Анықтама. $\{1, ., \oplus\}$ функциялардан тұратын формуланы Жегалкин полиномы деп атайды. $(P_2, ., \oplus, 1)$ – Жегалкин алгебрасы деп аталады.

Функционалды толық жүйелердің (базистердің) мысалдардары:

$\{., \neg\}; \{., \vee\}; \{\}; \{\downarrow\}; \{\rightarrow, \neg\}; \{\vee, \sim, \oplus\}; \{\&, \sim, \oplus\}$ т.б

Кез келген жүйенің толықтығы туралы сұраққа Пост теоремасы жауап береді:

$$X \downarrow Y \equiv \overline{X \vee Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

X	X	$X \downarrow X$	$X X$	$\bar{X}$
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0

$$X \vee Y = \overline{X \downarrow Y} = (X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y)$$

$$\bar{X} = X \downarrow X = X|X$$

$$X \cdot Y = \overline{X|Y} = (X|Y)|(X|Y)$$

$$X \vee Y = (X|X)|(Y|Y)$$

Пост кластарының анықтамасы.

P_0 -класы. Бұл 0-ді сақтайтын буль функциялары класы, яғни $f(0,0,...,0)=0$ болатын функциялар. $P_0 = \{f \mid f(0,0,...,0) = 0\}$.

P_1 -класы. 1-ді сақтайтын функциялар класы, яғни $f(1,1,...,1) = 1$ болатын функциялар. $P_1 = \{f \mid f(1,1,...,1) = 1\}$

Екі жақты функциясының анықтамасы:

$$f^*(X_1, X_2, \dots, X_n) = \overline{f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)}$$

Мысалы:

$$f(X, Y) = X \vee Y$$

$$f^*(X, Y) = \overline{\bar{X} \vee \bar{Y}} = X \cdot Y$$

Ондай болса дизъюнкция мен конъюнкция бір біріне екі жақты функция болады.

S -класы - өзіне-өзі екі жақты функциялар класы. $S = \{f \mid f\text{-өзіне-өзі екі жақты функция}\}$, яғни

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Мысалдар:

1)

$$f(X, Y, Z) = X \oplus Y \oplus Z$$

$$f^*(X, Y, Z) = \overline{\overline{X} \oplus \overline{Y} \oplus \overline{Z}} = X \oplus 1 \oplus Y \oplus 1 \oplus Z \oplus 1 \oplus 1 = f(X, Y, Z)$$

2)

$$f(X) = X$$

$$f^*(X) = \overline{\overline{X}} = X = f(X)$$

3)

$$f(X) = \overline{X}$$

$$f^*(X) = \overline{\overline{X}} = \overline{X} = f(X)$$

M–монотонды функциялар класы. Кез-келген $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ және $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ нөлдер мен бірлер жиынтығында $\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$ шарттың орындалуынан

$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n)$ орындалса $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы монотонды деп аталады. $M = \{f \mid f\text{--монотонды функциялар}\}$.

5. L-сызықты функциялар класы.

Егер буль сақинасында $\langle \{0,1\}, \oplus, \odot \rangle$ f-функциясы $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \dots \oplus c_n x_n$ түрінде өрнектелетін болса, мұндағы $c_1, c_2, \dots, c_n \in \{0,1\}$ онда Буль функция сызықты деп аталады. $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ коэффициенттері төмендегідей анықталады.

$c_0 = f(0, 0, \dots, 0)$, $c_0 \oplus c_1 = f(1, 0, \dots, 0)$, $c_0 \oplus c_2 = f(0, 1, \dots, 0)$, ..., $c_0 \oplus c_n = f(0, 0, \dots, 1)$
яғни $c_0 = f(0, 0, \dots, 0)$, $c_1 = c_0 \oplus f(1, \dots, 0)$, ..., $c_n = c_0 \oplus f(0, 0, \dots, 1)$

Сонымен f-функциясының сызықтығын тексеру деген c_i коэффициенттерінің тауып, берілген формуланың ақиқаттық кестесімен табылған $c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n$ формуланың ақиқат кестесін салыстыру болып табылады. Мысалы. $x \vee y$ функциясы сызықты ма ?

Тексеру: $c_0 = 0 \vee 0 = 0$; $c_1 = c_0 \oplus f(1, 0) = 0 \oplus (1 \vee 0) = 1$; $c_2 = 0 \oplus f(0, 1) = 0 \oplus (0 \vee 1) = 1$;

Сонымен $c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y = x \oplus y$; $x \vee y$ пен $x \oplus y$ ақиқат кестесі бірдей емес. Ендеше $x \vee y$ –сызықты емес. Егер функцияның МДҚФ түріндегі V–операциясының орнына $\oplus$ қойылса онда сызықты функцияның мүлтіксіз полиномды қалыпты түрін аламыз. (МПКФ) (дизъюнкция белгісінің орнына $\oplus$).

Анықтама. Егер Жегалкин көпмүшелігінің құрамында айнымалылардың көбейтіндісі бар болса, онда көпмүшелік сызықты емес деп аталады, жоқ болса сызықты деп аталады.

Буль функциясының сызықтылығы Жегалкин көп мүшелігінің сызықтылығымен эквивалентті яғни Жегалкин көпмүшелігі сызықты болса оған сәйкес буль функциясы да сызықты болады.

Мысал. $f(x_1 y) = x|y$ функциясы Пост класстарының қайсысына жататынын анықтау керек.

$f(0, 0) = 1$; $f(1, 1) = 0$, $f(x_1 y) \notin P_0$ және $f(x_1 y) \notin P_1$

$f(1, 0) \neq f(0, 1)$ болғандықтан $f(x, y) \notin S$;

$f(0,0) > f(1,1)$ болғандықтан $f(x, y) \notin M$;

$f(x, y)$ функциясы үшін Жегалкин көпмүшелігі $f(x, y) = x|y = \overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y} =$

$|\overline{x} = x \oplus 1| = (x \oplus 1) \vee (y \oplus 1) = (x \oplus 1) \vee (y \oplus 1)$ сызықты емес. Мынадай кесте құруға болады:

Пост теоремасы Буль функциялар жүйесі Σ толық жүйе болады тек сонда ғана, егер әрбір P_0, P_1, S, M, L кластары үшін Σ жүйесінен осы класқа жатпайтын функция табылса.

f	P_0	P_1	S	M	L
$\vee$	+	+	-	+	-
$\neg$	-	-	+	-	+

Бұл теоремадан жоғарыдағы $X|Y$ функция толық жүйе құратындығын анықтайды, яғни Шеффер функциясы арқылы кез келген буль функциясын алуға болады:

X	Y	$X Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$X|Y = XY \oplus 1$$

f	P_0	P_1	S	M	L
$X Y$	-	-	-	-	-

Буль функциялар жүйесі толық болса базис деп аталады, ал жүйеден кез келген функция алынып тасталса жүйе толық емес болады.