

Тақырыбы. Колмогоров аксиомалары және ықтималдықтың классикалық анықтамасы

Анықтама 5.1. Ω ақырлы элементар оқиғалар жиыны берілсін. Ω жиынының барлық жиыншаларынан тұратын F оқиғалар алгебрасында анықталған, теріс емес, нормаланған (ықтималдандырылған) ақырлы-аддитивті функция *ықтималдық* деп аталады. Яғни, Ω ақырлы элементар оқиғалар жиыны болса, онда $F = \{A: A \subset \Omega\}$ оқиғалар алгебрасында анықталған, төмендегі үш шартты

- 1) әрбір $A \in F$ оқиғасы үшін $P(A) \geq 0$;
- 2) F оқиғалар алгебрасында жататын өзара қиылыспайтын кез келген A, B оқиғалары үшін

$$P(A + B) = P(A) + P(B);$$

3) $P(\Omega) = 1$

қанағаттандыратын $P: F \mapsto [0,1]$ функциясы *ықтималдық* деп аталады.

Анықтама 5.2. Ω ақырсыз элементар оқиғалар жиыны берілсін. Ω жиынының жиыншаларынан (барлық немесе барлық емес) тұратын σF оқиғалар σ -алгебрасында анықталған, теріс емес, нормаланған (ықтималдандырылған) σ -аддитивті функция *ықтималдық* деп аталады. Яғни, егер Ω элементар оқиғалар жиыны болса, онда σF оқиғалар σ -алгебрасында анықталған, төмендегі үш шартты

- 1) әрбір $A \in \sigma F$ оқиғасы үшін $P(A) \geq 0$;
- 2) σF оқиғалар σ -алгебрасында жататын, өзара қиылыспайтын кез келген ақырлы немесе саналымды $\{B_k\}_k$ оқиғалары үшін

$$P\left(\sum_k B_k\right) = \sum_k P(B_k);$$

3) $P(\Omega) = 1$

қанағаттандыратын $P: \sigma F \mapsto [0,1]$ функциясы
ықтималдық деп аталады.

Көргеніміздей, 5.1 және 5.2 анықтамаларынан
қосымша $\mu(\Omega) = 1$ шартын қанағаттандыратын өлшем
ықтималдық болып табылады.

5.1 және 5.2 анықтамаларындағы 1)-3) шарттары
А.Н. Колмогоров аксиомалары деп аталады.

(Ω, F, P) және $(\Omega, \sigma F, P)$ үштіктері *ықтималдық*
кеңістік деп аталады. Әрбір есепте осы үштікті құру өте
маңызды.

Колмогоров аксиомаларынан тікелей шығатын
салдарларды келтірейік.

1-салдар. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдық кеңістігі*
берілсін. Кез келген A оқиғасы үшін $(\bar{A} = \Omega \setminus A)$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

2-салдар. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдық кеңістігі берілсін.*
 $\emptyset \in \sigma F$ *мүмкін емес оқиғасы үшін*

$$P(\emptyset) = 0.$$

3-салдар. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдық кеңістігі берілсін.*
 $A \subset B$ *кірістіруін қанағаттандыратын әрбір A, B*
оқиғалары үшін

$$P(A) \leq P(B)$$

теңсіздігі орындалы.

4-салдар. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдық кеңістігі берілсін.*
Әрбір A, B оқиғалары үшін

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

теңдігі орындалады.

5-салдар. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдық кеңістігі берілсін.*
 $A_1, A_2, \dots, A_n$ *оқиғалары үшін*

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

теңсіздігі орындалады.

Барлық мүмкін элементар оқиғалар жиыны ақырлы болғанда ықтималдықтар кеңістігін құру үрдісі әрбір элементар оқиғаға теріс емес сан сәйкес қоюмен пара пар.

Егер сәйкес қойылатын сандар өзара тең болса, онда элементар оқиғаларды тең мүмкіндікті деп атап, құрылған ықтималдық кеңістігін классикалық үлгі дейміз.

Анықтама 5.3 (*Ықтималдықтың классикалық анықтамасы*). Ақырлы және тең мүмкіндікті элементар оқиғалардан тұратын Ω элементар оқиғалар жиыны берілсін. $\sigma F = \{A: A \subset \Omega\}$ оқиғалар алгебрасында жататын әрбір A оқиғасына

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

санын сәйкес қоятын ереже *ықтималдық* деп аталады (бұл анықтама 5.1 анықтамасындағы А.Н. Колмогоровтың 1)-3) аксиомаларын қанағаттандырады) және ол “*ықтималдықтың классикалық анықтамасы*” деп те аталады.

Бұл барлық мүмкін элементар оқиғалар жиыны ақырлы жағдайындағы ықтималдықтар кеңістігін құрудың элементар оқиғалар тең мүмкіндікті болғандағы дербес түрі.

Ескерту 5.1. Есептерде «тең мүмкіндікті» ұғымы «кездейсоқ», «идеалды» сөздері арқылы да жеткізіледі. Мысалы, «Қораптан 10 шардың ішінен 1 шар кездейсоқ таңдап алынды» деген сөйлем «Қораптағы шарлар бір-бірінен ешқандай айырмашылығы жоқ, пішіні, көлемі, тығыздығы жағынан бірдей» дегенді білдіреді. Сонымен қатар, есептерде «Идеалды» сөзі геометриялық пішіні мен тығыздығы жағынан біркелкі денелерді білдіреді, яғни Ω жиынындағы элементар оқиғалардың орындалу мүмкіндіктері бірдей.

Тарихқа көз жүгіртетін болсақ, бұл анықтаманы ең алғаш рет француз математигі П.Лаплас (1749-1827 ж.) өзінің *«Аналитикалық ықтималдықтар теориясы»* атты оқулығында ұсынған болатын. Лаплас алғысөзінде *«Алғашында құмар ойындардан бастау алған осы ғылым адамзаттың әлемдік білім аренасында айтарлықтай маңызды орын алуға бекінгендігі, әрине, керемет Шын мәнісінде өмірлік маңызды мәселелердің көбі ықтималдықтар теориясының есебі емес пе?»* деп жазған болатын.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Ω элементар оқиғалар жиыны ақырлы болған жағдайда А.Н.Колмогоров аксиомалары деп қандай шарттар аталады?
2. Жалпы жағдайда А.Н.Колмогоров аксиомалары деп қандай шарттар аталады?
3. А.Н.Колмогоров аксиомалары нешінші жылы енгізілді?
4. Ықтималдық дегеніміз не?
5. Ақиқат оқиғаның ықтималдығы неге тең?
6. А.Н.Колмогоров аксиомаларының тікелей салдары болып табылатын ықтималдықтың монотондылық қасиетін беріңіз.
7. Кез келген оқиға мен оған қарама-қарсы оқиғаның ықтималдықтарының қосындысы неге тең?
8. Мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы неге тең?
9. Кез келген екі оқиғаның бірігуінің ықтималдығы неге тең?
10. Ықтималдықтың классикалық анықтамасын беріңіз.
11. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы алғаш рет кімнің және қандай еңбегінде берілді?
12. Ω элементар оқиғалар жиыны $n(n \in N)$ элементтен тұрған жағдайда барлық мүмкін оқиғалар саны қанша?

13. Өлшем ықтималдық болу үшін қандай шарт орындалуы керек?