

6-Дәріс тақырыбы. Логикалық алгебра функцияларын аналитикалық түрде жазу. ДҚФ, КҚФ, МДҚФ, МКҚФ

Анықтама. Егер x логикалық айнымалы, $\delta \in \{0,1\}$ болса, онда $x^\delta = \begin{cases} x, & \text{егер } \delta = 1 \\ \bar{x}, & \text{егер } \delta = 0 \end{cases}$ өрнегі литер деп аталады. $x, \bar{x}$ литерлері контрарлы литерлер деп аталады.

Анықтама. Егер формула айнымалылар немесе олардың терістеулерінің дизъюнкциясы болса (бір мүшелі болуы да мүмкін) оны элементар дизъюнкция (дизъюнктер) деп атайды.

Мысалдар. $x_2, x_3; x_1 \vee x_2 \vee x_3, x_1 \vee x_2; \bar{x} \vee y \vee z; x \vee y \vee x$ —дизъюнктер.

Анықтама. Егер формула айнымалылар немесе олардың терістеулерінің конъюнкциясы болса (бір мүшелі болуы да мүмкін) оны элементар конъюнкция (конъюнктер) деп атайды.

$x_1, x_2, x_1 \wedge x_2, \bar{x}_3, x_2 \& \bar{x}_3, x_2 \& x_3, x_1 \wedge x_2 \wedge x_3; x_1 \& \bar{x}_3 \& x_4 \& x_2$

x —бір уақытта дизъюнкт те, конъюнкт те бола алады.

Анықтама. Конъюнктердің дизъюнкциясы дизъюнктивті қалыпты форма (ДҚФ) (Элементар конъюнкциялардың дизъюнкциясы) деп, ал дизъюнктердің конъюнкциясы конъюнктивті қалыпты форма деп аталады (КҚФ—Элементар дизъюнкциялардың конъюнкциясы).

Мысалы. ДҚФ: $x_2, \bar{x}_3, x\bar{y}, x_1 \& x_2 \& x_3, x\bar{y} \vee yz, (x_1 \& x_2 \& \bar{x}_3) \vee (x_1 \& \bar{x}_2 \& x_3)$

КҚФ: $(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee z)y$; — ДҚФ; $\bar{x}\bar{y}$ —КҚФ-те ДҚФ-те бола алады.

1-Теорема. Кез-келген A формуласы үшін оған эквивалентті қалыпты дизъюнктивті формадағы B формуласын ($A \equiv B$) табуға болады. B A -ның қалыпты дизъюнктивті формуласы деп аталады. Дәлелдеусіз (кез келген формула өзінің ДҚФ, КҚФ эквивалентті).

Формуланы дизъюнктивті қалыпты формаға келтірудің алгоритмі

1. Формула құрамындағы барлық логикалық операцияларды

$(\varphi \rightarrow \psi) \sim (\bar{\varphi} \vee \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \sim (\bar{\varphi} \vee \psi) \wedge (\bar{\psi} \vee \varphi)$, эквиваленттіліктер және

$|\downarrow, \oplus$ операцияларының анықтамаларын пайдаланып дизъюнкция,

конъюнкция, терістеу арқылы өрнектейміз. (Дизъюнктивті қалыпты формаға түрлендіру)

2. Морган заңын пайдаланып, барлық терістеулерді айнымалыларға көшіріп, қос терістеулерді $\overline{\overline{x}} = x$ формуласы бойынша қысқартамыз.

3. Дистрибутивті $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \sim ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$ заңды пайдаланып, формуланы барлық конъюнкциялар дизъюнкциялардан бұрын орындалатындай түрлендіреміз.

1-3 пункттерді орындаудың нәтижесінде формула дизъюнктивті қалыпты формаға түрлендіріледі.

Мысалы, $\varphi = ((x \rightarrow y) \downarrow \overline{(y \rightarrow z)})$ формуласын дизъюнктивті қалыпты формаға түрлендіру керек болсын. $\rightarrow, \downarrow$ операцияларын $\wedge, \vee, \neg$ – арқылы өрнектейміз.

$$\begin{aligned} x &= (\overline{\overline{x}} \vee y) \downarrow \overline{(\overline{\overline{y}} \vee z)} = \overline{(\overline{\overline{x}} \vee y) \vee (\overline{\overline{y}} \vee z)} = \overline{\overline{\overline{x}} \vee y} \wedge \overline{\overline{\overline{y}} \vee z} \equiv \\ &\equiv (\overline{\overline{x}} \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{\overline{y}} \wedge \overline{z}) \equiv (x \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{y} \wedge \overline{z}) \equiv |дистрибутивті заң бойынша| \equiv \\ &(x \wedge \overline{y} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}); \end{aligned}$$

$$\text{Сонымен, } \varphi = ((x \rightarrow y) \downarrow (x \rightarrow z)) \equiv (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z});$$

2-Теорема. Кез келген А формуласы үшін оған эквивалентті және ҚҚФ болатын В формуласын табуға болады $A \equiv B$ (дәлелдейміз) В А-ның ҚҚФ. Кез келген формула өзінің ҚҚФ эквивалентті.

Конъюнктивті қалыпты формаға келтірудің алгоритмі алдыңғыға ұқсас, тек 3 пунктің орнына 3' қолданылады.

3'. $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \sim ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$ дистрибутивті заңды пайдаланып, формуланы барлық дизъюнкциялар, конъюнкцияларға қарағанда бұрын орындалатындай түрлендіреміз.

Мысалы. $\varphi \equiv (x \rightarrow y) \wedge ((\overline{y} \rightarrow z) \rightarrow \overline{x})$ формулада $\rightarrow$ болмайтындай түрлендіреміз:

$$\begin{aligned} \varphi &\sim (\overline{\overline{x}} \vee y) \wedge \overline{(\overline{\overline{y}} \rightarrow z) \vee \overline{x}} \equiv (\overline{\overline{x}} \vee y) \wedge (\overline{\overline{y} \vee z \vee \overline{x}}) \\ &\equiv (\overline{\overline{x}} \vee y) \wedge (\overline{\overline{y}} \wedge \overline{z} \wedge \overline{\overline{x}}) \equiv |дистр. заң бойынша| \equiv (\overline{\overline{x}} \vee y)(\overline{\overline{y}} \wedge \overline{z})(\overline{\overline{x}}) - \text{бұл формуланы одан әрі тағы түрлендіруге болады:} \end{aligned}$$

$$(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \equiv |дистр. заңды қолданып| \equiv (\bar{x} \vee (y \wedge \bar{y})) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \equiv$$

$\bar{x} \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \equiv \bar{x}$; $\bar{x}$ -ті ҚҚФ деуге де, ДҚФ деуге де болады. Бұлардан басқа егер формуланың ДҚФ белгілі болса ҚҚФ-ке, ҚҚФ белгілі болса ДҚФ көшудің алгоритмдері бар. Олар төмендегідей:

ДҚФ-ті ҚҚФ-ке түрлендірудің алгоритмі.

Егер формуланың ДҚФ белгілі болса, оны төмендегі ережемен ҚҚФ түрлендіруге болады.

Айталық, ДҚФ $F = \kappa_1 \vee \kappa_2 \vee \dots \vee \kappa_m$ $m \geq 1$ түрінде болсын. Мұндағы $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$ -элементар конъюнкциялар.

1. F-ке қос терістеу $F = \overline{\overline{\kappa_1 \vee \kappa_2 \vee \dots \vee \kappa_m}}$ заңын қолданып, $\overline{\kappa_1 \vee \kappa_2 \vee \dots \vee \kappa_m}$ -ті ДҚФ-ке $\kappa'_1 \vee \kappa'_2 \vee \dots \vee \kappa'_m$ түрлендіру керек. Мұндағы $\kappa'_1, \kappa'_2, \dots, \kappa'_m$ -элементар конъюнкциялар. Сонда,

$$F = \kappa_1 \vee \kappa_2 \vee \dots \vee \kappa_m = \overline{\overline{\kappa_1 \vee \kappa_2 \vee \dots \vee \kappa_m}} = \overline{\kappa'_1 \vee \kappa'_2 \vee \dots \vee \kappa'_m};$$

Морган заңымен екінші терістеуден құтылып элементар конъюнкциялардың терістеулерін элементар дизъюнкцияларға $D_1, D_2, \dots, D_p$ түрлендіру керек.

$$\text{Сонда, } F = \overline{\kappa'_1 \vee \kappa'_2 \vee \dots \vee \kappa'_p} = \overline{\kappa'_1} \cdot \overline{\kappa'_2} \cdot \dots \cdot \overline{\kappa'_p} = D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_p.$$

Кез келген ҚҚФ ДҚФ-қа түрлендірудің алгоритмі.

Егер формуланың ҚҚФ белгілі болса, оны төмендегі ережемен ДҚФ түрлендіруге болады.

Айталық, ДҚФ $F = \kappa_1 \wedge \kappa_2 \wedge \dots \wedge \kappa_m$ $m \geq 1$ түрінде болсын. Мұндағы $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$ -элементар дизъюнкциялар.

F-ке қос терістеу $F = \overline{\overline{\kappa_1 \wedge \kappa_2 \wedge \dots \wedge \kappa_m}}$ заңын қолданып, $\overline{\kappa_1 \wedge \kappa_2 \wedge \dots \wedge \kappa_m}$ -ді ҚҚФ-ке $\kappa'_1 \vee \kappa'_2 \vee \dots \vee \kappa'_m$ түрлендіру керек. Мұндағы $\kappa'_1, \kappa'_2, \dots, \kappa'_m$ -элементар дизъюнкциялар. Сонда,

$$F = \kappa_1 \wedge \kappa_2 \wedge \dots \wedge \kappa_m = \overline{\overline{\kappa_1 \wedge \kappa_2 \wedge \dots \wedge \kappa_m}} = \overline{\kappa'_1 \vee \kappa'_2 \vee \dots \vee \kappa'_m}$$

Морган заңымен екінші терістеуден құтылып элементар дизъюнкциялардың терістеулерін элементар конъюнкцияларға $D_1, D_2, \dots, D_p$ түрлендіру керек.

$$\text{Сонда, } F = \overline{\kappa_1} \wedge \overline{\kappa_2} \wedge \dots \wedge \overline{\kappa_p} = \overline{\kappa_1} \vee \overline{\kappa_2} \vee \dots \vee \overline{\kappa_p} = D_1 \vee D_2 \vee \dots \vee D_p.$$

Буль функцияларының шексіз көп ҚҚФ, ДҚФ болуы мүмкін. Олардың ішінен МДҚФ, МКҚФ- ерекше ролі бар.

Мүлтіксіз дизъюнктивті, конъюнктивті қалыпты форма (МДҚФ, МКҚФ).

Анықтама. Кез келген формуланы оған эквивалентті ДҚФ-ті ҚҚФ-ке түрлендірудің алгоритмі.

$D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_m$ $m \geq 1$ формулаға түрлендіруге болады, мұндағы D_i -не айнымалы, не оның терістеуі немесе айнымалы мен оның терістеуінің дизъюнкциясы (конъюнкциясы). Осындай формула берілген формуланың дизъюнктивті (конъюнктивті). қалыпты түрі деп аталады.

Мүлтіксіз дизъюнктивті қалыпты форма (МДҚФ)

Анықтама. Айталық, А формуласы $\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \rangle$ айнымалыларынан тәуелді болсын. Егер төмендегі шарттар орындалса А формуласы берілген айнымалылар тізімінде мүлтіксіз дизъюнктивті қалыпты формада делінеді.

А- дизъюнктивті қалыпты формада (элементар конъюнктер дизъюнкциясы)

А- ның әрбір дизъюнктивті мүшесі к-мүшелі конъюнкция және бұл конъюнкцияның әрбір l - орында ($1 < l < k$) не x_{i_k} айнымалысы не оның терістеуі орналасады. А- ның барлық дизъюнктивті мүшелері өзара әртүрлі.

Мысалы, $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ -айнымалылар тізімінде

$$((x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}))\text{-дизъюнктивті}$$

қалыпты формалар.

Мүлтіксіз конъюнктивті қалыпты форма (МКҚФ).

Анықтама. Айталық, A формуласы $\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \rangle$ айнымалыдан тәуелді болсын. Егер төмендегі шарттар орналаса A - берілген айнымалылар тізімінде мүлтіксіз конъюнктивті қалыпты формада делінеді.

A -конъюнктивті қалыпты формада

A -ң әрбір мүшесі k мүшелі дизъюнкция және бұл дизъюнкцияның l -ші орнында ($1 < l < k$) не x_{l_k} айнымалысының не өзі, не оның терістеуі тұрса.

A -ның барлық конъюнктивті мүшелері өзара әр түрлі.

Мысалдар. $(x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3)$ - МДҚФ

$(x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$ - МДҚФ емес.

Берілген φ формулаға эквивалентті МДҚФ, МКҚФ табу есептерін шешу үшін, алдымен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ буль функциясы үшін Шеннон жіктеуін қарастырамыз.

Шеннон жіктелулері.

Кез келген Буль функциясы Шеннон жіктелуі түрінде өрнектеледі.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{f(\delta_1, \dots, \delta_n)=1 \\ \text{болатын бар-} \\ \text{лық } \delta_1, \dots, \delta_n \\ \text{құрамалары}}} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i^{\delta_i} \right) = \bigvee_1 \left(\begin{matrix} f=1 \text{ болатын құрама-} \\ \text{лар нұмірлері} \end{matrix} \right)$$

Мысалы, $f(x_1, x_2, x_3)$ 000, 010, 011 құрамаларында 1-ге тең болсын. Олай болса,

$f(x_1, x_2, x_3)$ жіктелуі: $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$; Осыған ұқсас 0-ге тең емес $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциялары төмендегідей болып жіктеледі:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{f(\delta_1, \dots, \delta_n)=0 \\ \text{болатын бар-} \\ \text{лық } \delta_1, \dots, \delta_n \\ \text{құрамалары}}} \left(\bigvee_{i=1}^n x_i^{1-\delta_i} \right) = \bigwedge_0 \left(\begin{matrix} f=0 \text{ болатын құрама-} \\ \text{лар нұмірлері} \end{matrix} \right)$$

Бұл формулалардан төмендегі теореманы келтіруге болады.

Теорема. Кез келген Буль функциясын өрнектейтін формула табылады Егер $f \neq 0$ болса оны МДҚФ түрінде өрнектейтін жалғыз ғана формула бар.

$$\varphi = \bigvee_{f(\delta_1, \dots, \delta_n)=1} K^1(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$$

Егер $f \neq 1$ болса оны МКҚФ түрінде өрнектейтін жалғыз ғана формула бар.

$$\varphi = \bigwedge_{f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)=1} K^0(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$$

Мысалы, ақиқаттық кестемен берілген $f(x, y, z)$ функциясының МДҚФ, МКҚФ табу керек. Функцияның толықтығы туралы теорема бойынша

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x, y, z)$	1	0	0	1	0	1	0	1

$$\varphi_1 = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} z \vee x y z \text{ -МДҚФ;}$$

$$\varphi_2 = x y \bar{z} \vee x \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y} z \text{ -МКҚФ}$$

Сонымен МДҚФ, МКҚФ - белгілері.

Дизъюнкцияның (конъюнкцияның) мүшелері әр түрлі конъюнктердің (дизъюнктердің) мүшелері әр түрлі бір де бірі конъюнкте (дизъюнкте)айнымалының әрі өзі ,әрі оның терістеуі бірге болмайды.

Әрбір конъюнктің (дизъюнктің) құрамында формулаға енетін барлық айнымалылар болуы керек, яғни $x_1^\alpha \wedge x_2^\alpha \wedge \dots \wedge x_n^\alpha$ мұндағы x_i^α не x_i өзі , не $\bar{x}_i$.

Мысалы, $\bar{x} y z \vee x \bar{y}$ -өрнегі $\bar{x} \vee y \wedge (\bar{z} \rightarrow x)$ формуласының – дизъюнктивті қалыпты формаларының бірі. Бұл МДҚФ-ң алдыңғы үш талабын қанағаттандырады, ал төртіншісін қанағаттандырмайды. Сондықтан оған түрлендірулер жүргіземіз ($z \vee \bar{z}$ көбейтміз).

$$\bar{x} y z \vee x \bar{y} \equiv \bar{x} y z \vee (x \bar{y} (z \vee \bar{z})) \equiv \bar{x} y z \vee x \bar{y} z \vee x \bar{y} \wedge \bar{z} \equiv \bar{x} y z \vee x \bar{y} \bar{z}$$

Кез келген $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ формуласын МДҚФ (МКҚФ) түріне келтіру үшін мына ережені қолдануға болады.

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ формуласын қандайда бір дизъюнктивті (конъюнктивті) қалыпты формаға түрлендіру.

Егер конъюнктке қандай да бір айнымалы өзінің терістеуімен бірге кірсе оны ДҚФ- тан жою керек. ($x \wedge \bar{x} = 0$)

Егер конъюнктке бір литер x^α бірнеше рет кірсе, олардың біреуін ғана қалдырып қалғандарын қысқарту керек. ($x \wedge x = x$)

Егер конъюнктердің біріне $(x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_k^{\delta_k})$ у айнымалыс кірмей тұрса, онда бұл конъюнктті оған эквивалентті $x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_k^{\delta_k} \wedge (y \vee \bar{y})$ формуламен алмастырамыз да, дистрибутивті заңды $(x \wedge (y \vee z)) = xy \vee xz$ қолданып ДҚФ түріне келтіреміз. Егер толық емес конъюнкт бірнешеу болса олардың әрқайысы үшін сәйкес $(y \vee \bar{y})$ формуласын қосамыз.

Алынған ДҚФ-да бірдей бірнеше конъюнктер болса олардың $(x \wedge x)$ біреуін ғана қалдырамыз. Нәтижесінде МДҚФ шығады.

Мысалы, $\varphi = x \bar{x} \vee x \vee yzy$ ДҚФ –ны МДҚФ-қа түрлендіру керек.

$$\begin{aligned} \varphi &= x \bar{x} \vee x \vee yzy \equiv (x(y \vee \bar{y}) \vee yz(x \vee \bar{x})) \equiv [\text{дистрибутивтік заңымен ашамыз}] \equiv xy \vee x\bar{y} \vee xyz \vee \bar{x}yz \equiv xy(z \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee xyz \vee \bar{x}yz \equiv \\ &\equiv xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz \equiv xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

КҚФ-ны МКҚФ түрлендірудің алгоритмі де осындай. Мысал арқылы көрейік. $\overline{xyz} \wedge (xy \rightarrow x\bar{y}z)$ формуланы МКҚФ ға келтіру керек болсын.

$$\begin{aligned} 1. \text{Формуланы қандайда бір конъюнктивті қалыпты формаға (КҚФ) келтіреміз. } \overline{xyz} \wedge (xy \rightarrow x\bar{y}z) &\equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\overline{xy} \vee x\bar{y}z) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee x\bar{y}z) \equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee x)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \equiv \end{aligned}$$

2). Бірдейлерін жоямыз. Айнымалының терістеуімен бірге қатысып тұрған конъюнкция мүшесі, 3 қайталанып тұрған конъюнкция мүшесі 1 мен 4.

$$\begin{aligned} (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) &= \text{ТОЛЫҚТЫРАМЫЗ} = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\bar{z}) = \\ &\equiv (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \left| \begin{array}{l} \text{бірдей конъюнк-} \\ \text{тивті мүше} \\ \text{жойылады} \end{array} \right| = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) - \text{Бұл МДҚФ} \end{aligned}$$