

Тақырыбы. Комбинаторика элементтері

Элементар оқиғалар кеңістігі барлық мүмкін элементар оқиғаларын тізіп жазу арқылы немесе қандай да бір шарттарды қанағаттандыратындығын көрсету арқылы беріледі.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы барлық мүмкін элементар оқиғалар тең мүмкіндікті болғанда екі ақырлы жиындардың элементтер санының қатынасы түрінде жазылады. Яғни, әрі қарай, бізге барлық элементар оқиғалар жиынының құрылысымен қоса, онда қанша элемент жататындығын білу де маңызды болып келеді. Біздің ендігі мақсатымыз ақырлы жиындағы элементтер санын, атап айтқанда, ықтималдықтар теориясында «таңдамалар» деген арнайы атқа ие жаңа құрылымдар (жиынтықтар) санын анықтау, соның ішінде, берілген n әртүрлі объектілерден қандай да бір шарттармен анықталатын k элементті таңдамалар санын n және k сандары арқылы өрнектеу. Бұл сұрақтарға жауап беру үшін математиканың комбинаторика атты бөлімінің әдістері қолданылады.

Комбинаториканың элементтеріне көшелік.

Комбинаториканың негізгі ережесі (жұп жағдай). n ($n = 1, 2, \dots$) элементтен тұратын $\{a_1, \dots, a_n\}$ жиынынан және m ($m = 1, 2, \dots$) элементтен тұратын $\{b_1, \dots, b_m\}$ жиынынан бірінші a_i элементі бірінші жиыннан, ал екінші b_j элементті екінші жиыннан алынған (a_i, b_j) түріндегі әртүрлі жұптарды барлығы $n \times m$ әдіспен құруға болады.

Комбинаториканың негізгі ережесі (жалпы жағдай). s оң бүтін саны мен бірінен кейін бірі орындалатын s әрекеттер тізбегі берілсін.

Егер

бірінші іс-әрекет барлық мүмкін n_1 тәсілдің бірімен,

екінші іс-әрекет барлық мүмкін n_2 тәсілдің бірімен,

...

соңғы s -ші іс-әрекет барлық мүмкін n_s тәсілдің бірімен орындалса, онда осындай ретпен жүргізілетін s іс-әрекет әртүрлі $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_s$ тәсілмен орындалады.

Дәл осы ережені жиындар арқылы келесі түрде беруге болады. $A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}\}$, $A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_{n_2}^{(2)}\}, \dots$, $A_s = \{a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \dots, a_{n_s}^{(s)}\}$ жиындары берілсін. Онда $A_1 \times \dots \times A_s = \{(a_{i_1}^{(1)}, a_{i_2}^{(2)}, \dots, a_{i_s}^{(s)}) : i_k = 1, \dots, n_k (k = 1, \dots, s)\}$ жиыны $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_s$ элементтерден тұрады.

Комбинаториканың негізгі ережесін қолдана отырып, күнделікті өмірде кездесетін түрлі есептерді шешуге болады.

Таңдамалар олардың санын есептеу ерекшеліктеріне байланысты төрт – қайтарымды, қайтарымсыз, реттелген, реттелмеген деген түрлерге бөлінеді. Олардың анықтамасын "Жәшік схемасы" арқылы түсіндірейік.

n және k оң бүтін сандары берілсін. Жәшікте 1 санынан n санына дейін нөмірленген n шарлар жиыны берілсін, бұл жиынды *бас жиынтық* деп атап, $\{a_1, \dots, a_n\}$ арқылы белгілейміз. Осы жәшіктен бірінен кейін бірі алынатын k шарларды $(x_1, \dots, x_k)$ ($x_i \in \{a_1, \dots, a_n\}, i = 1, 2, \dots, k$) түрінде белгілеп, оларды *таңдама* деп атаймыз. Таңдаманың жиыннан ерекшелігі, жиында әр элемент тек бір рет қана кездесе, таңдамада бір элемент бірнеше рет кездесуі де, кездеспеуі де мүмкін және жиындағы элементтердің реті маңызды емес болса, таңдамаларда реті ескерілуі де, ескерілмеуі де мүмкін.

Қайтарымды таңдама. n және k оң бүтін сандары берілсін. Жәшікте 1 санынан n санына дейін нөмірленген n шар бар. Жәшіктен бірінен кейін бірі k шар алынады. Әрбір шар алынғаннан кейін нөмірі жазылып, жәшікке қайта қайтарылады. Сонда әрбір қадамда n шарлардың кез келгені шығуы мүмкін, яғни, әрбір k қадамды орындаудың n мүмкіндігі болады. Бұл жағдайда

алынатын шарлар саны k -ға ешқандай шектеу қойылмайды.

Қайтарымсыз таңдама. n және k ($k \leq n$) оң бүтін сандары берілсін. Жәшікте 1 санынан n санына дейін нөмірленген n шар бар. Жәшіктен бірінен кейін бірі k шар алынады. Алынған шар қайтадан жәшікке қайтарылмайды. Сонда әрбір шар алудан кейін келесі шарды алу мүмкіндіктерінің саны біреуге кемігендіктен алынатын шарлар санына $k \leq n$ түріндегі шектеу бар.

Әрине, құрамы әртүрлі таңдамалардың теңдігі жайлы сөз қозғамасақ та болады, элементтері бір-бірінен өзгеше болатын таңдамалардың тең еместігі бірден анықталады. Мысалы, (a, b, c) және (a, b, d) таңдамалары, біріншісінде d элементі жоқ болса, екіншісінде c элементі жоқ, яғни екі таңдама өзара тең емес.

Енді құрамындағы элементтері бірдей болатын таңдамаларға келейік.

Бірдей құрамды таңдамалардың теңдігі жайлы сөз ету үшін олардың келесі екі түрін ажыратайық.

Реттелген таңдамалар – құрамымен қоса элементтерінің орналасуы да ескерілетін таңдамалар.

$(1,3,1)$ және $(1,1,3)$ таңдамалары реттелген таңдама ретінде құрамы бірдей болғанмен (1 элементі екі рет, 3 элементі бір рет бар) олардың орналасу реті әртүрлі болғандықтан әртүрлі таңдама болып, таңдамалар санын есептеген кезде екеуі жеке-жеке есепке алынады.

Реттелмеген таңдама – элементтердің орналасуы ескерілмейтін таңдамалар. Екі реттелмеген таңдамалардың біріншісінде кездесетін әрбір элемент екіншісінде дәл сонша рет кездессе және керісіншесі де орындалса, онда екі таңдама тең деп алынады. Мысалы, $(1,3,1)$ және $(1,1,3)$ таңдамалары реттелмеген таңдамалар ретінде тең және таңдамалардың есебін жүргізгенде бір таңдама деп саналады, сонымен қоса, $(3,1,1)$ таңдамасы да оларға тең.

Бұлардың әрқайсысы өзінше маңызды болғандықтан жеке-жеке тоқталайық.

Анықтама 4.1 (*Қайтарымды реттелген таңдамалар*). n және k оң бүтін сандары берілсін. n элементтен k бойынша алынған қайтарымды реттелген таңдама n элементтен k элемент бойынша алынған қайтарымды орналастыру деп аталады да, олардың мүмкін саны $\tilde{A}_n^k$ түрінде белгіленеді.

Жәшікте 1 санынан n санына дейін нөмірленген n шар бар. Жәшіктен бірінен кейін бірі k шар алынады да, қайтадан жәшікке қайтарылады. Шарларды әрбір таңдау алдында жәшік құрамының өзгермеуіне байланысты k таңдаудың әрқайсысы n түрлі әдіспен орындалады.

Комбинаториканың негізгі ережесіне сәйкес барлық мүмкін таңдамалар саны

$$\tilde{A}_n^k = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ рет}} = n^k$$

болады.

Анықтама 4.2 (*Қайтарымсыз реттелген таңдама*). n және k ($k \leq n$) оң бүтін сандары берілсін. n элементтен k бойынша алынған қайтарымсыз реттелген таңдама n элементтен k элемент бойынша алынған қайтарымсыз орналастыру деп аталады да, олардың мүмкін саны A_n^k түрінде белгіленеді.

Жәшікте 1 санынан n санына дейін нөмірленген n шар бар. Жәшіктен бірінен кейін бірі k шар алынады. Әр қадамнан кейін жәшікке алынған шар қайтарылмағандықтан k жәшіктен алынатын шарлар саны n жәшіктегі бастапқы шарлар санынан аспайды.

Тағы да, комбинаториканың негізгі ережесіне сәйкес барлық мүмкін болатын комбинациялар саны

$$\begin{aligned} A_n^k &= (n - 0) \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) \\ &= n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \end{aligned}$$

санына тең болады.

Анықтама 4.3. n бойынша n элементті қайтарымсыз жүргізілген орналастыру *орыналмастыру* деп аталады да, олардың мүмкін саны P_n арқылы белгіленеді.

Бұлай аталу себебі таңдамалар n түрлі элементтен тұрады және бір-бірінен тек орналасу ретімен ғана ерекшеленеді. n элементтен тұратын алмастыру саны анықтама бойынша $P_n = A_n^n$ болғандықтан

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Реттелмеген таңдамаларға көшелік.

Анықтама 4.4 (*Қайтарымсыз реттелмеген таңдама*). n және k ($k \leq n$) оң бүтін сандары берілсін. n элементтен k элемент бойынша алынған қайтарымсыз реттелмеген таңдама *қайтарымсыз теру* деп аталады. Олардың мүмкін саны C_n^k арқылы белгіленіп,

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

формуласымен есептелінеді.

Анықтама 4.5 (*Қайтарымды реттелмеген таңдама*). n және k оң бүтін сандары берілсін. n элементтен k элемент бойынша алынған реттелмеген қайтарымды таңдама *қайтарымды теру* деп аталады да, олардың мүмкін саны $\tilde{C}_n^k$ түрінде белгіленеді.

Бұндай таңдамалар саны

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

арқылы есептелінеді.

Анықтама 4.6 (*Қайтарымды орналастыру*). k элементтен құралған $\{a_1, \dots, a_k\}$ жиыны мен $n_1, n_2, \dots, n_k$ оң бүтін сандары берілсін. k элементтен a_1 элементі n_1 рет, ..., a_k элементі n_k рет кездесетін $n = n_1 + \dots + n_k$ элементті орналастырулар k элементтен

$n_1, n_2, \dots, n_k$ бойынша алынған қайтарымды орналастыру деп аталады.

Олардың мүмкін саны $P_n(n_1, \dots, n_k)$ арқылы белгіленіп,

$$P_n(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} (n_1 + \dots + n_k = n)$$

формуласы бойынша есептелінеді.

Эйлер-Венн диаграммасы жиындарға амалдар қолдану нәтижесіндегі жиын элементтерінің санын анықтау формуласын көрнекі түсіндіру үшін де қолданады.

Кез келген ақырлы екі жиынның ең болмағанда біреуінде жататын барлық элементтер санын анықтау үшін

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

формуласы (қиылысуында жатқан элементтер A жиынының да, B жиынының да элементі ретінде $|A| + |B|$ қосындысында екі рет саналып тұрғандықтан $|A \cap B|$ саны бір рет азайтылады, бұл жерде, әдеттегідей, $|\cdot|$ арқылы жиынның элементтер санын белгілейміз) қолданылады.

Кез келген ақырлы үш жиынның ең болмағанда біреуінде жататын барлық элементтер санын анықтауда екі жиын үшін алынған формуланы қолданып

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| \\ &\quad - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

формуласына келеміз.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Ω элементар оқиғалар жиыны ақырлы болған жағдайда А.Н.Колмогоров аксиомалары деп қандай шарттар аталады?
2. Жалпы жағдайда А.Н.Колмогоров аксиомалары деп қандай шарттар аталады?
3. А.Н.Колмогоров аксиомалары нешінші жылы енгізілді?
4. Ықтималдық дегеніміз не?
5. Ақиқат оқиғаның ықтималдығы неге тең?
6. А.Н.Колмогоров аксиомаларының тікелей салдары болып табылатын ықтималдықтың монотондылық қасиетін беріңіз.
7. Кез келген оқиға мен оған қарама-қарсы оқиғаның ықтималдықтарының қосындысы неге тең?
8. Мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы неге тең?
9. Кез келген екі оқиғаның бірігуінің ықтималдығы неге тең?
10. Ықтималдықтың классикалық анықтамасын беріңіз.
11. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы алғаш рет кімнің және қандай еңбегінде берілді?
12. Ω элементар оқиғалар жиыны $n(n \in N)$ элементтен тұрған жағдайда барлық мүмкін оқиғалар саны қанша?
13. Өлшем ықтималдық болу үшін қандай шарт орындалуы керек?