

Тақырыбы. Ықтималдықтар теориясындағы өлшемдер теориясы

Анықтама 3.1. Элементтері жиын болатын бос емес жиын *жиындар жүйесі* деп аталады.

Анықтама 3.2. Егер S жиындар жүйесінде жататын кез келген A және B жиындары үшін олардың $A \cup B$ бірігуі де ($A \cap B$ қиылысуы да, $A \setminus B$ айырымы да) S жиындар жүйесінде жатса, онда S жиындар жүйесі *бірігу (қиылысу, айырма) амалына қарағанда тұйық* деп аталады.

Анықтама 3.3. Ω бос емес жиыны берілсін. Бірігу, қиылысу, айырма амалдарының ақырлы санына қарағанда тұйық және Ω жиынының өзін де қамтитын Ω жиынының жиыншаларынан құралған F жиындар жүйесі *алгебра* деп, ал Ω жиыны осы алгебраның *бірлік элементі* деп аталады.

Теорема 3.1. Ω бос емес жиыны берілсін. Ω жиынының жиыншаларынан құралған F жиындар жүйесі алгебра болуы үшін төмендегі үш шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті:

1-шарт: $\Omega \in F$,

2-шарт: Егер $A \in F$, онда $\bar{A} = \Omega \setminus A \in F$,

3-шарт: Егер $A \in F, B \in F$, онда $A \cup B \in F$.

Анықтама 3.4. Ω бос емес жиыны берілсін. Бірігу, қиылысу, айырма амалдарының ақырлы және саналымды санына қарағанда тұйық және Ω жиынын қамтитын Ω жиынының жиыншаларынан құралған σF жиындар жүйесі *σ -алгебра* деп аталады.

Теорема 3.2. Ω бос емес жиыны берілсін. Ω жиынының жиыншаларынан құралған σF жиындар жүйесі *σ -алгебра* болуы үшін төмендегі үш шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті:

1*-шарт: $\Omega \in \sigma F$,

2*-шарт: Егер $A \in \sigma F$, онда $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \sigma F$,

3*-шарт: Егер $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \sigma F$, онда $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma F$.

Анықтама 3.5. Анықталу жиыны жиындар жүйесі болатын функция жиындар функциясы деп аталады.

Төменде барлық жерде өзара қиылыспайтын саны ақырлы (саналымды) $E_1, E_2, \dots, E_n$ ($E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$) жиындары үшін $\sum_k E_k$ арқылы олардың бірігуін белгілейміз, яғни

$$\forall k_1, k_2: k_1 \neq k_2, E_{k_1} \cap E_{k_2} = \emptyset \Rightarrow \sum_k E_k := \bigcup_k E_k.$$

Анықтама 3.6. S жиындар жүйесінде анықталған нақты мәнді Φ жиындар функциясы берілсін. Егер өзара қиылыспайтын, өздерімен бірге олардың $\sum_{k=1}^n E_k$ бірігуі де S жиындар жүйесінде жататын кез келген $E_1, E_2, \dots, E_n$ жиындары үшін

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \Phi(E_k)$$

теңдігі орындалса, онда Φ жиындар функциясы *ақырлы-аддитивті функция* деп аталады.

Анықтама 3.7. S жиындар жүйесінде анықталған нақты мәнді ақырлы-аддитивті Φ жиындар функциясы берілсін. Егер өзара қиылыспайтын, өздерімен бірге олардың $\sum_{k=1}^{+\infty} E_k$ бірігуі де S жиындар жүйесінде жататын кез келген $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ жиындары үшін

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Phi(E_k)$$

теңдігі орындалса, онда S жиындар жүйесінде анықталған Φ жиындар функциясы *σ -аддитивті функция* деп аталады.

Анықтама 3.8. Ω бос емес жиыны мен оның жиыншаларынан құралған σF σ -алгебрасы берілсін. σF сигма алгебрасында анықталған, теріс емес, σ -аддитивті функция *өлшем* деп аталады.

Әдетте, өлшемді μ әрпімен белгілейді, сонда өлшем $\mu: \sigma F \mapsto [0, +\infty]$

$$1. \quad \forall A \in \sigma F: \mu(A) \geq 0,$$

2. σF σ -алгебрасында жататын кез келген өзара қиылыспайтын саны ақырлы (не саналымды) $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$) жиындары үшін келесі теңдігі орындалады

$$\mu\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k)$$

шарттарды қанағаттандыратын функция болып табылады.

Ескерту 3.1. Оқулықта өлшем ретінде сигма-алгебраның кем дегенде бір элементіндегі мәні ақырлы болатын функциялар ғана қарастырылады.

Ескерту 3.2. Жоғарыдағы 3.1-ескертуі жағдайында $\mu(\emptyset) = 0$ теңдігі орындалады. Шынында да, $\mu(A) < +\infty$ болсын. Онда 3.8-анықтаманың 2 шарты бойынша

$$\mu(A) = \mu(A + \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$$

теңдігінен қажетті

$$\mu(\emptyset) = 0$$

теңдігіне келеміз.

Енді ақырлы аралықтардың ұзындықтарының жалпылауы болатын Лебег өлшемін құру процедурасына көшейік.

Ол үшін әуелі Борельдік жиындарға өлшем құрылады.

Анықтама 3.9. Нақты жиынындағы барлық шенелген интервалдарды қамтитын ең кіші сигма алгебра *борельдік σ -алгебра* деп, ал оның элементтері борельдік жиын немесе Борель бойынша өлшемді жиын деп аталады. Борельдік σ -алгебра $\sigma B(R)$ арқылы белгіленеді.

Теорема 3.3. (R кеңістігіндегі ашық жиындардың құрылысы). R жиынында жататын кез келген G ашық жиыны өзара қиылыспайтын, шеткі нүктелері G жиынында жатпайтын интервалдардың ақырлы немесе саналымды бірігуі түрінде өрнектеуге болады, яғни

$$\begin{aligned} \exists \{a_k, b_k\}_{k \in T}: a_k \notin G, b_k \notin G, (a_k, b_k) \cap (a_j, b_j) \\ = \emptyset \ (k \neq j), G = \sum_{k \in T} (a_k, b_k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

мұндағы T — ақырлы немесе саналымды индекстер жиыны.

Анықтама 3.10. G ашық сандық жиыны берілсін. G жиынын құрайтын интервалдардың ұзындықтарының қосындысы G жиынының *өлшемі* деп аталады, яғни (3.1) шарттарын қанағаттандыратын $\{(a_k, b_k)\}_{k \in T}$ интервалдары үшін

$$m(G) = \sum_{k \in T} (b_k - a_k).$$

Анықтама 3.11. $E \subset R$ шенелген жиыны берілсін. E жиынын қамтитын J ашық жиындардың өлшемдерінің инфимумы E жиынының *сыртқы өлшемі* деп аталады да, $\mu^*(E)$ арқылы белгіленеді:

$$\mu^*(E) := \inf_{\substack{J \text{ ашық:} \\ E \subset J}} m(J).$$

Сыртқы өлшемнің қасиеттері:

1°. Сыртқы өлшем кез келген $A, A \subset R$ үшін анықталады,

2°. Теріс еместілік: $\mu^*(A) \geq 0$,

3°. Монотондылық: $A \subset B$ болғанда $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

4°. Жартылай аддитивтілік: $\mu^*(\bigcup_k A_k) \leq \sum_k \mu^*(A_k)$.

Анықтама 3.12. $F \subset R$ шенелген тұйық жиыны берілсін.

$$m(F) = b - a - m(C_{[a,b]}F)$$

саны F жиынының өлшемі деп аталады. Мұндағы $a = \inf F$, $b = \sup F$, $C_{[a,b]}F = [a, b] \setminus F$ (бұл ашық жиын болады).

Анықтама 3.13. $E \subset R$ шенелген жиыны берілсін. E жиынының ішкі жиыны болатын тұйық жиындардың өлшемдерінің супремумы E жиынының ішкі өлшемі деп аталады да, $\mu_*(E)$ түрінде белгіленеді:

$$\mu_*(E) := \sup_{\substack{F \text{ тұйық,} \\ F \subset E}} m(F).$$

Ішкі өлшемнің қасиеттері:

1°. Ішкі өлшем кез келген $A, A \subset R$ үшін анықталады,

2°. Теріс еместілік: $\mu_*(A) \geq 0$,

3°. Монотондылық: $A \subset B$ болғанда $\mu_*(A) \leq \mu_*(B)$,

4°. Жартылай аддитивтілік: $\mu_*(\sum_k A_k) \geq \sum_k \mu_*(A_k)$ ($i \neq j$ болғанда $A_i \cap A_j = \emptyset$).

5°. $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.

Анықтама 3.14. $E \subset R$ шенелген жиыны берілсін. Егер E жиынының ішкі және сыртқы өлшемдері тең болса, онда E жиыны Лебег бойынша өлшемді жиын,

ішкі және сыртқы өлшемдердің ортақ мәні E жиынының *Лебег өлшемі* деп аталып, $\mu(E)$ арқылы белгіленеді.

Сыртқы және ішкі өлшемдер өзара тең болмаған жағдайда (нақтырақ айтқанда ішкі өлшем сыртқы өлшемнен кіші болған жағдайда) жиын *өлшемсіз* деп аталады.

Теорема 3.4. *Интервалдың өлшемі оның ұзындығына тең болатындай Борельдік сигма - алгебрада жалғыз ғана өлшем бар. Ол өлшем – Лебег өлшемі.*

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Жиындар жүйесі дегеніміз не?
2. S жиындар жүйесі белгілі бір теориялық-жиындық амалға қатысты тұйық дегеніміз не?
3. Алгебра дегеніміз не?
4. Жиындар жүйесінің алгебра болуының қажетті және жеткілікті шарты.
5. σ -алгебра дегеніміз не?
6. Жиындар жүйесінің σ -алгебра болуының қажетті және жеткілікті шарты.
7. Жиындар функциясы дегеніміз не?
8. Ақырлы-аддитивті функция дегеніміз не?
9. σ -аддитивті функция дегеніміз не?
10. Өлшем дегеніміз не?
11. Жиынның сыртқы өлшемі дегеніміз не?
12. Жиынның ішкі өлшемі дегеніміз не?
13. Лебег бойынша өлшемді жиын дегеніміз не?
14. Лебег өлшемі дегеніміз не?