

5-Дәріс тақырыбы. Буль алгебрасы. Логикалық функциялардың әмбебап түрлері. Логикалық схемаларды қолдану мысалдары.

Математикалық логика жоғары математиканың бір (бөлімі) саласы болып табылады. Математикалық логиканың заңдары мен әдістері арқылы түрлі процестерге, жүйелерге, құбылыстарға зерттеулер жүргізуге болады. Математикалық логиканың негізгі объектілерінің бірі тұжырымдар.

1. Тұжырымдар мен тұжырымдар формасы.

Анықтама. Тұжырымдар деп деп ақиқаттығы немесе жалғандығы туралы айтуға болатын хабарлы сөйлемді айтамыз. Бүкіл ғылыми білімдер (физика, химия, биологияның заңдары мен құбылыстары, математика т.б) күнделікті өмірде болып жатқан оқиғалар, экономика мен басқару процесінде туындайтын түрлі ситуациялар тұжырымдар түрінде формальданады.

Сұраулы, лепті не болмаса мағынасыз сөйлемдер тұжырым бола алмайды. Тұжырымдарға мысалдар: «2 жерде 2-төрт» , «Біз 20 –шы ғасырда өмір сүріп жатырмыз», «Қосылғыштардың орны ауысқаннан қосынды өзгермейді» , «Астана- Қазақстанның астанасы», «Теңге-Қазақстан валютасы» , «Бүгін сейсенбі», «Егер жаңбыр жауып тұрса қол шатыр алыңыз» т.б тұжырымдар. «Математика- қызықты пән немесе қуырдақ дәмді тамақ» деген сөйлемдер де тұжырым емес, себебі бірдей пікір жоқ. «Бөлменің ауданы 20 м^2 », «Қар жауып тұр», « $a^2=4$ » деген сөйлемдер тұжырым емес , 1- сөйлемде нақтылы қандай бөлме екендігі көрсетілуі керек, екінші сөйлемде қайда қар жауып тұрғанын көрсететін қосымша сөз керек, үшінші сөйлем $a = \pm 2$ (а-тұжырымдылық айнымалысы) болғандықтан тұжырым бола алмайды. Бұл сөйлемдермен амалдар орындау үшін олардың әрқайсысының ақиқаттық мәнін білу керек.

Анықтама. Құрамына ең болмаса бір айнымалы бар және айнымалылардың орнына мәндерін қойғанда тұжырымға айналатын сөйлем тұжырымдылық форма деп аталады.

Мысалы, Сан 7-ге бөлінеді; $3x < 2$; Ол қара торы; Сан, x ол сөздерінің орнына белгілі бір мәндер қойылса , сөйлем тұжырымға айналады.

Тұжырымдар логикасының негізгі логикалық байланыстырушылары.

Табиғи қарапайым сөйлемдерден құрмалас сөйлемдер құру үшін “ және “, “ немесе “, “егер ... онда “, “ сонда ... тек сонда ғана “ сияқты шылаулар қолданылатындығы белгілі. Тұжырымдартеориясында да элементар тұжырымдардан күрделі тұжырымдар құрастыруға болады. Айталық P, Q логикалық тұжырымдар болсын. Оларға кестедегідей логикалық байланыстар қолданылады: Логикалық байланыстырушылар арқылы құрылған құрама тұжырымдардың ақиқат не жалғандығы , оның құрамына кіретін қарапайым тұжырымдардың ақиқаттық мәндерімен анықталады.

атауы	оқылуы	белгіленуі
Логикалық терістеу конъюнкция	терістеу және	$\neg$ &
дисъюнкция	немесе	$\vee$
импликация	егер ... онда	$\Rightarrow$
эквиваленция	эквивалентті	$\Leftrightarrow$

Тұжырымдарға қолданылатын амалдар

Екі айнымалылы логикалық функциялардың кестесі.

X	Y	g ₀	g ₁	g ₂	g ₃	g ₄	g ₅	g ₆	g ₇	g ₈	g ₉	g ₁₀	g ₁₁	g ₁₂	g ₁₃	g ₁₄	g ₁₅
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция	Формулалары	Атау
g ₀ =	0	тұрақты (константа) 0
g ₁ =	$X \& Y = X \cdot Y = X \wedge Y$	конъюнкция
g ₂ =	$\neg(X \rightarrow Y) = X \& \neg Y$	импликацияның терістеуі
g ₃ =	X	бірінші айнымалы
g ₄ =	$\neg(Y \rightarrow X) = \neg X \& Y$	кері импликацияның терістеуі
g ₅ =	Y	екінші айнымалы
g ₆ =	$X \oplus Y = \neg X \& Y \vee X \& \neg Y$	2-нің модулі бойынша қосу
g ₇ =	$X \vee Y$	дизъюнкция
g ₈ =	$X \downarrow Y = \neg(X \vee Y) = \neg X \& \neg Y$	дизъюнкцияның терістеуі (Пирс стрелкасы)
g ₉ =	$X \sim Y = \neg X \& \neg Y \vee X \& Y$	эквиваленттілік
g ₁₀ =	$\neg Y$	екінші айнымалының терістеуі
g ₁₁ =	$Y \rightarrow X = X \vee \neg Y$	кері импликация
g ₁₂ =	$\neg X$	бірінші айнымалының терістеуі
g ₁₃ =	$X \rightarrow Y = \neg X \vee Y$	импликация
g ₁₄ =	$X Y = \neg X \vee \neg Y = \neg(X \& Y)$	Шеффер штрихы (конъюнкцияның терістеуі)
g ₁₅ =	1	тұрақты (константа) 1

Логикалық тұжырымдар формулаларының эквиваленттілігі.

Анықтама. Айталық А мен В бір айнымалылар тізіміне $\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$ тәуелді екі формула болсын. Егер олар $\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$ тізімінің кез- келген бағасында бірдей мәндер қабылдаса оларды эквивалентті формулалар деп атайды.

Эквиваленттік формулалар мысалдары

№ п/п	Формула	№ п/п	Формула
1.	$X \vee Y = Y \vee X$	2.	$X \wedge Y = Y \wedge X$
3.	$(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$	4.	$(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z)$
5.	$(X \vee Y) \wedge Z = (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$	6.	$(X \wedge Y) \vee Z = (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$
7.	$X \vee X = X$	8.	$X \wedge X = X$
9.	$X \vee (X \wedge Y) = X$	10.	$X \wedge (X \vee Y) = X$
11.	$\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$	12.	$\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$
13.	$\neg X \vee X = 1$	14.	$\neg X \wedge X = 0$
15.	$0 \vee X = X$	16.	$0 \wedge X = 0$
17.	$1 \vee X = 1$	18.	$1 \wedge X = X$
19.	$\neg 0 = 1 \quad (\neg 1 = 0)$	20.	$\neg(\neg X) = X$
21.	$X \wedge Y \vee X \wedge \neg Y = X$	22.	$X \vee (\neg X \wedge Y) = X \vee Y$

Буль алгебрасының негізгі эквивалентті қатынастары (заңдары)

1-2. Конъюнкция мен дизъюнкцияның коммутативтілігі

3-4. Конъюнкция мен дизъюнкцияның ассоциативтілігі

5-6. Конъюнкцияның дизъюнкцияға қатысты дистрибутивтілігі (Дизъюнкцияның конъюнкцияға қатысты дистрибутивтілігі).

7-8. Дизъюнкция мен конъюнкцияның көптігін жою

9-10 Жұтылу заңдары.

11-12. Морган заңдары.

13-14. Қарама- қарсылық заңдары:

15-19. 0 мен 1 константаларының қасиеттері:

20. Қос терістеу заңы.

21-22. Желімдеу заңдары.

Бұл негізгі эквиваленттік қатынастардың ерекшелігі, олар бір –бірінен шықпайды, олардың дұрыстығына, стандартты әдіспен ғана (ақиқаттық кесте) көз жеткізуге болады.

Анықтама: Аргументтері де, өзі де 0 және 1 мәндерін қабылдайтын $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы Буль функциясы деп аталады. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясының аргументтері $x_1, x_2, \dots, x_n$ сәйкес $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ мәндерін қабылдасын ($x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$). $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ мәндер құрамасы деу атау келісілген. n – құрамасының ұзындығы деп аталады. Әр құрама 2-лік жүйе цифрларынан тұрады және оларға(құрамаларға) нөмір беру келісілген. Құрамаларды нөмірлерінің табиғи өсу ретімен орналастырады. Мысал: $n=3$

$n=3$ 000; 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111; - 8 құрама

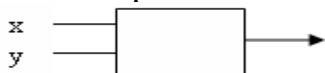
$n=4$ 0000; 0001; 0010; 0101; 0100; 0101; 0110; 0111;

1000; 1001; 1010; 1011; 1100; 1101; 1110; 1111;- 16 құрама

Құрамалардың осылайша табиғи нөмірлерінің өсуімен орналасуын стандартты орналасу дейміз. Ұзындығы m –ге тең N –элементтен жасалған орналасулардың саны N^m екендігі белгілі. Бұдан ұзындығы n –ге тең 0 мен 1 жасалған барлық функциялардың саны 2^n тең екендігін көреміз. n – аргументтен тұратын барлық функциялардың саны 2^{2^n} тең. 0,1-константаларын 0-орынды Буль функциясы деу керек. Әрбір логикалық функцияны сол жағында барлық 2^n -құрамалар (айнымалының мәндері ұзындығының n –ге тең екілік вектор), ал оң жағында осы құрамадағы функцияның мәні орналасқан кесте арқылы беруге болады.

Логикалық алгебра функциясын бульдік функция, екілік функция (двоичная) немесе ауыстырып қосқыш (переключательная) функция деп атайды. Буль функциялары арқылы қандай да бір құрылғыға берілген сигналдардың қортынды сигналға түрленуін белгілеуге болады. Мысалы, суретте көрсетілгендей құрылғының n нүктеден тоқ қабылдау мүмкіндігі бар. Құрылғыларға берілген тоққа байланысты $x_i=1$ айнымалының мәні тоқтың i -ші нүктеге берілуін көрсетеді, $x_i=0$ тоқ жоқты көрсетеді. $f(b_1b_2, \dots, b_n) = 1$ тоқтың шығу нүктесін берілуін, $f = 0$ болуы тоқтың берілмеуін көрсетеді.

1-мысал. конъюнкция $X \wedge Y$ – екі тоқ беру нүктесі, бір шығу нүктесі бар құрылғыны көрсетеді. Шығу нүктесіне тоқ беріледі, егер x, y - ке тоқ берілсе.



2-мысал. Үш адамнан тұратын комиссияның дауыс беруін белгілеп отыратын құрылғыны қарастырайық. Комиссия мүшелері резолюцияға (ұсынылған шешім) өз кнопкасын батырады. Егер комиссия мүшелерінің көпшілігі резолюцияны мақұлдаса, онда резолюция (шешім) қабылданады. Бұл регистрация жасайтын құрылғымен белгіленіп отырылады

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f(x,y,z)	0	0	0	1	0	1	1	1

Құрылғының жұмысының ақиқаттық кестесі суретте көрсетілгендей функциямен сипатталады; алынған функцияны $f(0,0,0) = f(001) = f(010) = f(100) = 0$ теңдіктер жүйесімен де беруге болады.

(0 0 0 1 0 1 1 1) – жиынтығы f функциясының мәндер векторы деп аталады.

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай функциялар логикалық деп аталады?
2. Бір айнымалыдан тәуелді барлық функцияларды атаңыз.
3. n айнымалыдан тәуелді неше логикалық айнымалылар бар ?
4. Қандай айнымалылар негізгі деп аталады, қандайлары – жалған?
5. Логика алгебрасының қандай формулалары эквивалентті деп аталады?