Практикалық жұмыс №8

Бүкіләлемдік тартылыс заңы және екі дене есебі

Екі дененің ерекше проблемасы жағдайында қозғалмайтын деп қателесетін және орталық дене деп аталатын үлкен масса *M* денесіне қатысты аз масса *m* денесінің қозғалысы қарастырылады.

Қозғалатын дененің υ сызықтық жылдамдығы орталыққа қатысты энергия интегралымен анықталады.

Қозғалатын дененің υ сызықтық жылдамдығы орталыққа қатысты энергия интегралымен анықталады

$$\upsilon^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \qquad (1)$$

мұндағы $\mu=G(M+m)$, a – массасы кіші дененің орбитасының жартылай үлкен осі, r – сол дененің радиус векторы, G – гравитациялық тұрақты.

Қозғалыстағы дененің m массасы орталық дененің *M* массасымен салыстырғанда елеусіздей аз болса, онда екі дене есебі шектелген деп аталады, содан кейін $\mu = GM$.

Энергетикалық интегралға сәйкес радиусы $r=a$ болатын дөңгелек орбитада (экцентриситет $e = 0$) массасы кіші дене орталық денені айналып өтуі үшін оның осы қашықтықтағы жылдамдығы болуы керек

$$\upsilon_{\text{к}} = \sqrt{\frac{\mu}{\text{a}}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \qquad (2)$$

бұл айналмалы жылдамдық деп аталады. Дене қозғалысының орташа жылдамдығы ретінде оны айналу кезеңі бойынша да есептеуге болады Т және жартылай ось және дененің орбиталары:

$$\upsilon_{\text{к}} = \upsilon_{\text{a}} = \frac{2\pi\text{a}}{\text{T}}. \qquad (3)$$

Орталық денеден r қашықтықта қозғалатын дененің жылдамдығы болса

$$\upsilon_{\text{п}} = \upsilon_{\text{к}}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\mu}{\text{T}}} \qquad (4)$$

онда орбита парабола болады ($e=1$, $a=\infty$). Сондықтан $\upsilon_{\text{п}}$ жылдамдығы параболалық деп аталады.

Егер $\upsilon>\upsilon_{\text{п}}$ болса, онда қозғалатын дене орталық дененің жанынан гипербола бойымен өтеді ($e>1$).

Радиус векторы r болатын орбитаның әрбір нүктесінде дененің жылдамдығы

$$\upsilon = \upsilon_{\text{a}}\sqrt{\frac{2\text{a}}{r} - 1} \quad (5)$$

Эллипстік орбитаның орталық денеге ең жақын нүктесі перицентр, ал одан ең алысы апоцентр деп аталады.

Бұл нүктелерге арнайы атаулар берілген, бірақ орталық органның атауы және олардың кейбіреулері келесі кестеде көрсетілген:

Орталық дене	Грекше аталуы	Перицентр атауы	Апоцентр атауы
Күн	Гелиос	перигелий	афелий
Жер	Гея	перигей	апогей
Венера	Геспер	перигесперий	апогесперий
Марс	Арес	периарий	апоарий
Сатурн	Кронос	перикроний	апокроний
Ай	Селена	периселений	апоселений

Перицентрде *r=q=a(1-e)* кезінде спутник денесі ең жоғары жылдамдыққа ие

$$\upsilon_q = \upsilon_a\sqrt{\frac{Q}{q}} = \upsilon_a\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \quad (6)$$

ал апоцентрде *r=q=a(1-e)* кезінде ең баяу жылдамдық ие болады:

$$\upsilon_Q = \upsilon_a\sqrt{\frac{q}{Q}} = \upsilon_a\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}. \quad (7)$$

Аспан денелерінің жылдамдығы әрқашан км/с-пен, ал қашықтығы астрономиялық бірліктермен, километрмен немесе орталық дененің радиустарымен беріледі. Сондықтан (5), (6) және (7) формулаларында қашықтықтардың мәндерін бірдей өлшем бірліктеріне ауыстыру қажет

$$\upsilon_k = \frac{29{,}78}{\sqrt{r}} \approx \frac{29{,}8}{\sqrt{r}} \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right]. \quad (8)$$

Егер қашықтық r километрмен берілсе, ал орталық дененің массасы Жер массаларымен өрнектелсе, онда айналмалы жылдамдық

$$\upsilon_k = 631{,}3\sqrt{\frac{M}{r}} \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right]. \quad (9)$$

Соңында, Жер массаларында массаларды және Жер радиусы бойынша қашықтықты өлшегенде, айналмалы жылдамдық

$$\upsilon_k = 7{,}91\sqrt{\frac{M}{r}} \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right]. \quad (10)$$

Жартылай үлкен осі a болатын эллипстік орбита бойынша орталық денені айналатын дененің орташа немесе айналмалы жылдамдығы υ_a (8), (9) және (10) формулаларымен де оларға $r=a$ мәнін қою арқылы есептеледі.

(9) және (10) формулаларына ауыстыру $r = R$ (аспан денесінің радиусы) осы дененің бетіне жақын орналасқан шеңберлік жылдамдықтың wk мәнін береді, оны астронавтикадағы *бірінші ғарыштық жылдамдық* деп атайды. Екінші кеңістік жылдамдығы *Wn—Wк√2*. Ол анық,

$$\upsilon_k = \frac{w_к}{\sqrt{r}} \quad \text{және} \quad \upsilon_k = \frac{w_п}{\sqrt{r}}, \tag{11}$$

мұндағы r аспан денесінің центрінен өлшенеді және оның радиустарымен өрнектеледі.

Кеплердің үшінші жалпыланған заңы

$$\frac{T_2^2(M_2+m_2)}{T_1^2(M_1+m_1)} = \frac{a_2^3}{a_1^3} \tag{12}$$

жартылай үлкен осьтері тиісінше a_1 және a_2-ге тең эллипстік орбиталарда орталық денелерінің айналасында (M_1 және M_2 массаларымен) T_1 және T_2 периодтарымен айналатын, массалары m_1 және m_2 денелердің кез келген жүйелеріне қолданылады.

Планеталар мен олардың серіктерінің массалары әдетте Жердің массаларымен (сирек – Күннің массаларында, тоннамен және килограмммен), орбиталардың жартылай негізгі осьтері – астрономиялық бірліктермен немесе километрмен және төңкеріс кезеңдері - жылдармен және күндермен, кейде - сағаттармен және минуттармен алынады.

(12) формула бойынша есептеу кезінде біртекті шамалар бір бірлікте өрнектелетін болса, бірліктер жүйесін таңдау маңызды емес. Бұл заң нысанда қолданылса

$$\frac{T^2\,(M+m)}{a^2} = \frac{4\pi^2}{G} \tag{13}$$

онда есептерді шешу міндетті түрде белгілі бірліктер жүйесінде жүзеге асырылады, өйткені әртүрлі жүйелерде гравитациялық тұрақтының сандық мәні әртүрлі болады.

Егер айналым периодтары орташа Жер күндерімен, арақашықтықтар километрмен және дене массаларымен жер массаларымен берілсе, онда Кеплердің үшінші заңы келесідей болады

$$T^2\,(M+m) = 132{,}7 \cdot 10^{-16} a^3 \tag{14}$$

Мысал 1.

Галлей кометасы 1910 жылы өзінің перигелиінен 0,587 а.б. гелиоцентрлік қашықтықта 54,52 км/с жылдамдықпен өтті, ал Икейи - Секи кометасы 1965 жылы – перигелидан 0,0083 а.б. қашықтықта 480 км/с жылдамдықпен өтті. Бұл кометалар қандай орбитада қозғалды және олар Күнге қашан оралады?

Берілгені: комета Галлея, q = 0,587 а.б., υ_q = 54,52 км/с; комета Икейи - Секи q = 0,0083 а. б., υ_q = 480 км/с.

Шешуі: Орбитаның түрін анықтау үшін одан берілген q қашықтықтағы кометаның Күнге қатысты айналмалы $v_к$ және параболалық $\upsilon_п$ жылдамдығын есептеп, есептелген жылдамдықтарды нақтыларымен салыстыру қажет.

Галли кометасы. (8) формула бойынша q = *0,587* а.б. қашықтықта айналмалы жылдамдық

$$\upsilon_k = \frac{29{,}78}{\sqrt{q}} \approx \frac{29{,}8}{\sqrt{0{,}578}} = 38{,}87 \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right],$$

ал (4) формула бойынша параболалық жылдамдық

$$\upsilon_{\text{п}} = \upsilon_{\text{к}}\sqrt{2} = 38{,}87 \cdot 1{,}414 = 54{,}69 \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right] \approx 55 \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right]$$

$\upsilon_к<\upsilon_q<\upsilon_п$ және бір уақытта υ_q $\upsilon_п$ -ге жақын болғандықтан, Галлей кометасы Күнді өте ұзартылған эллипстік орбитада айналады, оның жартылай үлкен осі (5) және (8) формулалары бойынша есептеледі.

(5) формулаға $r=q$ қойып, табамыз:

$$\upsilon_q = \upsilon_a \sqrt{\frac{2\text{a}}{q} - 1}$$

(8) формула бойынша кометаның айналмалы жылдамдығы

$$\upsilon_{\text{а}} = \frac{29{,}78}{\sqrt{q}} \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right]$$

Осы формуланы алдыңғы өрнекпен алмастырсақ:

$$\upsilon_q = 29{,}78 \sqrt{\frac{2}{q} - \frac{1}{\text{а}}}$$

Бұдан

$$\text{а} = \frac{29{,}78^2}{29{,}78^2 \cdot \frac{2}{q} \upsilon_{\text{п}}^2} = 18{,}0 \text{ а. б.}$$

q= Cп = α (1-e) формула бойынша орбитаның эксцентриситеті

$$e = 1 - \frac{a}{a} = 1 - \frac{0,587}{18,0} = 0,967$$

Кеплердің үшінші заңы бойынша кометаның айналу периоды

$$T = a\sqrt{a} = 18\sqrt{18} \approx 76 \text{ жыл}$$

Сондықтан Галлей кометасы қайтадан Күнге оралып, 1986 жылы көрінетін болады.

Икейи-Секи кометасы. Қашықтықта $r = q = 0,0083$ *а.б.* айналмалы жылдамдық

$$\upsilon_k = \frac{29,78}{\sqrt{q}} \approx \frac{29,8}{\sqrt{0,0083}} = 327 \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right].$$

және параболалық жылдамдық

$$\upsilon_{\text{п}} = \upsilon_{\text{к}}\sqrt{2} = 327 \cdot 1,414 = 461 \left[\frac{\text{км}}{\text{с}}\right]$$

яғни кометаның перигелийдегі жылдамдығы $\upsilon_q > \upsilon_{\text{п}}$;

Комета Күннің жанынан гиперболалық орбитада өттеді және оған енді қайтып оралмайды.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер:

1. Венера (0,723 а.б.), Жер (1,00 а.б.), Юпитер (5,20 а.б.) және Плутон (39,5 а.б.) орташа қашықтықтарындағы Күнге қатысты айналмалы және параболалық жылдамдықтары қандай? Жалпы нәтижелерге сүйене отырып, табылған үлгіні тауып, түсіндіріңіз. Планеталардың Күннен қашықтығы есептің шартында берілген.
2. Кіші планеталар Ахиллес пен Гектордың перигелий мен афелийдегі жылдамдығын есептеңдер, егер олардың айналмалы жылдамдығы 13,1 км/с-қа жақын болса, ал орбиталардың эксцентриситеттері сәйкесінше 0,148 және 0,024 болса. Бұл планеталар шамамен қандай орташа гелиоцентрлік қашықтықта орналасқан?
3. Меркурийдің орбитасының жартылай негізгі осі мен эксцентриситеттері 0,387 а.б. және 0,206, ал Марстың орбиталары 1,524 а.б. және 0,093. Осы планеталардың орташа жылдамдығын, перигелийдегі және афелийдегі жылдамдығын табыңыз.
4. Планеталардың орбиталарын шеңбер тәрізді және эклиптика жазықтығында жатады деп есептей отырып, олардың негізгі конфигурациялары кезінде Меркурий, Венера және Марстың радиалды жылдамдығын табыңыз. 1-ші және 2-ші есептерден

қажетті деректерді алыңыз. (Радиалды жылдамдық – кеңістіктегі жылдамдықтың бақылаушының көру сызығына проекциясы, яғни бұл жағдайда Жерден планетаға бағытталған бағытты аламыз).

5. Лидия және Адонис астероидтарының орташа, перигелий және афелий қашықтығындағы жылдамдығын, сондай-ақ осы қашықтықтағы айналмалы және параболалық жылдамдықтарын есептеңіз. Бірінші астероидтың орбитасының жартылай үлкен осі мен эксцентриситеті 2,73 а.б. және 0,078, ал екіншісінде 1,97 а.б. және 0,778.

Жауаптары:

1. 35,02 және 49,52; 29,78 және 42,11; 13,06 және 18,47; 4,74 және 6,70 (барлығы км/с).
2. 15,2 және 11,3; 13,4 және 12,8 (км/с); 2,27 а.б.
3. 47,9, 59,0 және 38,9; 24,1, 26,5 және 21,9 (км/с).
4. 0; 36,4; 13,5; 13,9 (км/с).
5. Лидия: 18,0, 19,5 және 16,7 (км/с); 18,0 және 25,4; 18,8 және 26,6; 17,4 және 24,6 (км/с).

Адонис: 21,2, 60,0 және 7,5 (км/с); 21,2 және 30,0; 45,1

Және 63,8; 15,9 және 22,5 (км/с).

Әдебиеттер:

1. Кононович Э.В., Мороз В.И. Общий курс астрономии: Учебное пособие /Под ред. В.В. Иванова. Изд. 2-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 544 с. (Классический университетский учебник).
2. http://spacescience.ru/content/υiew/441/