

Зертханалық жұмыс № 7

Кеплер заңдары. Бүкіләлемдік тартылыс заңы

Жұмыстың мақсаты: Кеплер заңдары мен тартылыс заңын қолдану мәселелерін шешу, аспан денелерінің көрінетін және нақты қозғалысының ерекшеліктерін талдау.

Құралдар-жабдықтар: Планеталар жүйесінің моделі, астрономиялық күнтізбелер мен анықтамалықтар.

Жұмысты орындау үшін алдын-ала білу керек мәліметтер:

1. Ішкі және сыртқы планеталар үшін конфигурациялар туралы түсінік
2. Синодтық қозғалыс теңдеуі
3. Кеплер заңдары
4. Эклиптикалық координаталар жүйесін
5. Әртүрлі конфигурациядағы планеталардың көріну шарттарын таба білу.

Қысқаша теориялық мәліметтер

Планеталардың Күнді айнала қозғалысы Кеплер заңдарымен сипатталған.

Иоганн Кеплер келесідей тұжырымдаған:

1. Барлық планеталар эллипс бойымен қозғалады, оның бір фокусында (барлық планеталарға ортақ) Күн орналасқан.
2. Планетаның радиус векторы тең уақыт аралықтарында тең аудандарды сипаттайды.
3. Планеталардың Күнді айнала айналуының жұлдыздық периодтарының квадраттары олардың эллипстік орбиталарының жартылай үлкен осьтерінің кубтарына пропорционал.

Екі планета үшін олардың екі сидерлік айналу кезеңдері T_1 және T_2 олардың Күннен орташа қашықтықтарымен a_1 және a_2 Кеплердің үшінші заңымен байланысты:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

мұндағы T_1, T_2 - планеталардың жұлдыздық орбиталық периодтары, a_1, a_2 - орбиталарының жартылай үлкен осьтері.

Егер орбиталардың жартылай үлкен осьтері Жерден Күнге дейінгі орташа қашықтықтың өлшем бірліктерімен өрнектелсе (*а.б.*)

және айналу кезеңдері жылдармен болса, онда Жер үшін $a=1$, $T=1$, ал кез келген планетаның Күн айналасындағы айналу периоды:

$$T^2 = a^3$$

И.Ньютонның еңбектерінің арқасында Кеплердің жалпыланған заңдары нақтылаған:

1. Тартылу күшінің әсерінен бір аспан денесі екінші аспан денесінің тартылыс өрісінде конустық қималардың бірі – шеңбер, эллипс, парабола немесе гиперболо бойымен қозғалады. Бұл тұжырым барлық аспан денелерінің қозғалысын сипаттау үшін қолайлы: жер серіктері, кометалар, қос жұлдыздар және т.б.

Дененің бетіндегі ауырлық күшінің үдеуі, оның айналасындағы денелерге әсер ететін гравитациялық үдеу:

$$g = k^2 \frac{M}{r^2},$$

мұндағы M - дене массасы; r – оның ортасынан тартылатын дененің ортасына дейінгі қашықтық; $k^2=6,68 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$ – гравитациялық тұрақтылық, мұнда ол СГС (сантиметр-грамм-секунда) жүйесінде берілген.

Аспан денесінің бетіндегі ϑ_K сындық жылдамдығы мына қатынаспен анықталады:

$$g = \frac{\vartheta_K^2}{r} = 2 \cdot k^2 \frac{M}{r^2}, \text{ яғни } \vartheta_K = \sqrt{2} \cdot k^2 \frac{M}{r},$$

мұндағы g - дене бетіндегі ауырлық күшінің үдеуі; M – дене массасы; r – дене радиусы.

2. Уақыт бірлігінде радиус векторымен сипатталған аудан тұрақты шама.

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = const,$$

мұндағы θ полярлық бұрыш (шын аномалия).

3. Кеплердің жалпылама заңы:

$$\frac{T_1^2 (M_1 + m_1)}{T_2^2 (M_2 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

мұндағы M_1 және m_1 - бір орталық дененің және оның серігінің массалары (мысалы, Күн мен Жердің массасы немесе Жер мен Айдың массасы), a_1 және T_1 - серіктің орбитасының жартылай үлкен

осі және оның орталық дененің айналасындағы орбиталық кезеңі. M_2, m_2, a_2 , және T_2 -да басқа орталық дене және оның серігі үшін тиісті мәнге ие (мысалы, Юпитер және оның спутниктерінің бірі үшін).

Күн айналасындағы планеталардың қозғалысында синодтық және сидерлік айналу кезеңдері ажыратылады.

Планетаның айналуының синодтық кезеңі (S) - оның бір аттас екі ретті конфигурациялары арасындағы уақыт аралығы.

Сидерлік немесе жұлдыздық айналым кезеңі (T) – планета өз орбитасында Күнді бір толық айналып өтетін уақыт кезеңі.

Жердің айналуының сидерлік кезеңі жұлдыздық жыл ($T_{ж}$) деп аталады.

Планета үшін тәулігіне орбитадағы бұрыштық орын ауыстыру $= 360/T$, ал Жер үшін $= 360/T_{ж}$. Планетаның және Жердің тәуліктік бұрыштық жылжуларының арасындағы айырмашылық планетаның тәулігіне көрінетін орын ауыстыруы болып табылады, яғни. $360/S$.

T планетаның Күнді айналып өтуінің *жұлдызды* немесе *сидерлік* кезеңі оның синодтық айналу кезеңімен S тәуелділігімен байланысты:

төменгі планеталар үшін (Меркурий және Шолпан)

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{E}$$

жоғарғы планеталар үшін (Марс, Юпитер, Сатурн, Уран және Нептун):

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{T}$$

мұндағы E – Жердің Күннің айналысында айналуының сидерлік кезеңі; $E = 1$ жұлдызды жыл, яғни $E = 365,26$ тәулік. Бұл синодтық қозғалыстың теңдеулері.

Әдетте шешім жұлдызды жылдарда жүргізіледі және қажет болған жағдайда тәуліктерге ауыстырылады.

Планеталардың салыстырмалы орналасуы олардың гелиоцентрлік эклиптикалық координаталары арқылы оңай белгіленеді, олардың мәндері жылдың әртүрлі күндері үшін астрономиялық күнтізбелерде «Планеталардың гелиоцентрлік бойлықтары» деп аталатын кестеде жарияланды. Бұл координаталар

жүйесінің орталығыда Күн, ал негізгі жазықтығында эклиптика орналасқан.

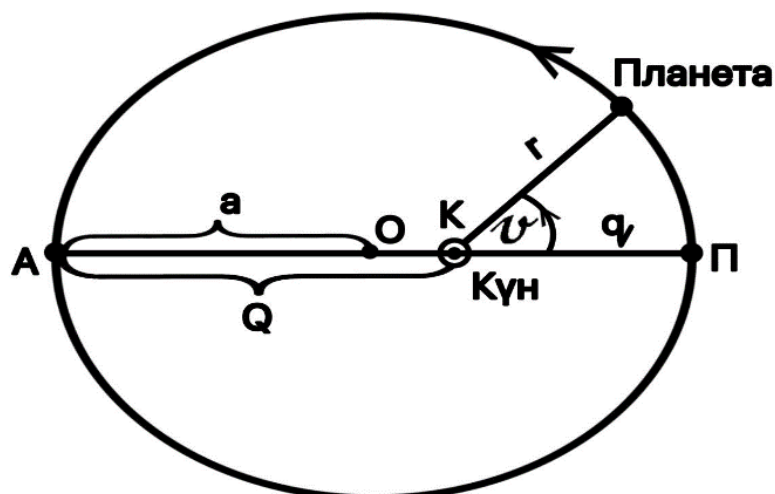
Планеталар Күнді эллипспен айналып өтетіндіктен, әр планетаның Күннен қашықтығы әр түрлі өзгеріп отырады (1-сурет). Планетаның Күннен минималды қашықтығы q *перигелий қашықтығы*, ал оның Күннен ең үлкен қашықтығы – Q *афелий қашықтығы* деп аталады.

Q және q мәндері планетаның Күннен a орташа қашықтығымен (яғни планета орбитасының *үлкен жартылай осімен*) мына тәуелділікпен байланысты:

$$q = a(1 - e) \text{ және } Q = a(1 + e),$$

мұндағы e – планета орбитасының эксцентриситеті. Одан туындайтыны

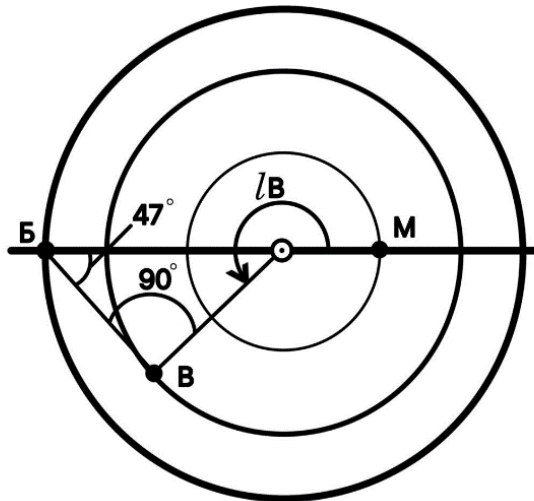
$$q + Q = 2a, a = \frac{q+Q}{2}.$$



Сурет 1. Планетаның эллипстік орбитасының элементтері

Ең үлкен *элонгацияның мәні* (яғни ішкі планетаның Күннен көрінетін бұрыштық алыстауы) оның Күннен элонгация сәтіндегі қашықтығына тәуелді (2-сурет).

Планета перигелийде болған кезде, ең үлкен элонгация мөлшері афелияда болған кездегі ең үлкен элонгация мәнінен аз болады, егер планетаның орбитасында айтарлықтай созылыққы болса (Меркурий планетасының орбитасы сияқты).



Сурет 2. Шолпанның батыс элонгациясы

Егер Жердің Күннен қашықтығы a_3 болса, онда ішкі планета үшін

$$q = a_3 \cdot \sin A_1 \text{ және } Q = a_3 \cdot \sin A_2$$

мұндағы A_1 – планета перигелийде болған кездегі ең үлкен элонгация мәні; A_2 – планета афелияда болған кездегі ең үлкен элонгация мәні.

Есептерді шығару мысалдары:

1-есеп

Нептунның синодтық айналу кезеңі 367,5 тәулікке тең, ал оның орбитасының эксцентриситеті $e = 0,0086$. Нептунның Күнді айналып өтуінің сидерлі кезеңін және оның Күннен орташа, перигельдік және афелиялық қашықтығын анықтаңыз.

Шешуі: Нептун сыртқы планета болып табылатындықтан, онда айнарудың сидерикалық кезеңін анықтау үшін мына формуланы қолдану керек:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{T'}$$

онда $E=1$ тең деп алып, ал S -ті жылдарда өрнектеу керек:

$$S = \frac{367,5}{365,26} = 1,0061 \text{ жыл.}$$

Енді есептеулерді жүргізуге болады:

$$\frac{1}{1,0061} = \frac{1}{1} - \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{1,0061} = \frac{0,0061}{1,0061} \Rightarrow T = \frac{10061}{61} = 165 \text{ жыл.}$$

Орташа қашықтық Кеплердің үшінші заңы бойынша орналасқан

$$165^2 = a^3 \Rightarrow a = 30,07 \text{ а.б. (астрономиялық бірлік).}$$

Перигелиялық және афелиялық қашықтық:

$$q = 30,07 (1 - 0,0086) = 29,81 \text{ а. б.}$$

$$Q = 30,07 (1 + 0,0086) = 30,33 \text{ а. б.}$$

2-есеп

Кейбір гипотезалық ішкі планетаның ең үлкен элонгациясы 16° -тан 30° -қа дейін өзгереді. Планета орбитасының жартылай осі мен эксцентриситетін, оның перигельдік және афелиялық арақашықтықтарын, сондай-ақ Күнді айналып өтудің сидерлі және синодтық кезеңдерін анықтаңыз.

Шешіуі: Белгілі формулалар бойынша алдымен перигельді және афелиялық қашықтықты табуға болады:

$$q = 1 \cdot \sin 16^\circ = 0,276 \text{ а. б.}$$

$$Q = 1 \cdot \sin 30^\circ = 0,500 \text{ а. б.}$$

Үлкен жартылай ось былай есептеледі:

$$a = \frac{0,276 + 0,500}{2} = 0,388 \text{ а. б.}$$

Кеплердің үшінші заңы планетаның Күнді айналып өтуінің сидерикалық кезеңін анықтайды:

$$T = \sqrt{a^3} = 0,388 \cdot \sqrt{0,388} = 0,242 \text{ жыл} = 0,88 \text{ тәулік.}$$

Айналудың сидерлі кезеңнің алынған мәні бойынша планета ішкі болып табылады (оның орбитасы Жер орбитасының ішінде жатыр) деген тұжырым жасауға болады, содан кейін ішкі планета үшін синодтық айналу кезеңін анықтау формуласын қолдана отырып, S мәні алынады:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{0,242} - \frac{1}{1} = \frac{1 - 0,242}{0,242} = \frac{0,758}{0,242} \Rightarrow S = 0,319 \text{ жыл} \\ = 116 \text{ тәулік.}$$

Эксцентриситет мына формула бойынша табылады:

$$e = 1 - \frac{q}{a} = 1 - \frac{0,276}{0,388} = 1 - 0,711 = 0,289.$$

Алынған сандық мәндер бойынша гипотезалық планета Меркурий деген тұжырым жасауға болады (егер алынған мәндерді кесте мәндерімен салыстыратын болсақ).

3-есеп

Егер Сатурн планетасының массасы Жердің массасынан 95 есе, ал радиусы Жердің радиусынан 9,41 есе көп болса, оның бетіндегі параболалық (немесе сындық) жылдамдықты анықтаңыз.

Шешуі: Мыналар белгілі деп саналады: Жердің массасы $m_3 = 5,97 \cdot 10^{27} \text{ г}$, Жердің радиусы $r_3 = 6370 \cdot 10^5 \text{ см}$ және гравитациялық тұрақты $k^2 = 6,68 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$.

Параболалық жылдамдыққа арналған формула бойынша есептеулер жүргізу қажер:

$$v_K = \sqrt{2 \cdot 6,68 \cdot 10^{-8} \frac{95 \cdot 5,97 \cdot 10^{27}}{9,41 \cdot 6370 \cdot 10^5}} = \sqrt{2 \cdot 63204 \cdot 10^8}$$

$$\approx 365 \cdot \frac{10^4 \text{ м}}{\text{с}} = 35,6 \text{ км/с}$$

Салыстыру үшін: Жердің бетіндегі критикалық жылдамдық $v_K = 11,2 \text{ км/с}$.

4-есеп

Егер Сатурнның Күнді айналып өту кезеңі 29,46 жыл, ал оның орбитасының үлкен жартылай осі $a = 9,54 \text{ а.б.}$, Сатурнның спутнигі Титан планетадан $a_1 = 1222 \cdot 10^3 \text{ км}$ орташа қашықтықта орналасқан және оның айналу кезеңі $T_1 = 15,95$ тәулік болса, Сатурнның массасы Күннің массасынан қанша есе аз екенін анықтаңыз.

Шешуі: Есепті шешу үшін Кеплердің жалпыланған үшінші заңы қолданылады:

$$\frac{T^2(M + m)}{T_1^2(m + m_1)} = \frac{a^3}{a_1^3}$$

онда M – Күннің массасы, m – Сатурнның массасы, m_1 – Титанның массасы. Бұл теңдеуде алымдағы Сатурнның m массасын (Күннің массасымен салыстырғанда) және бөлгіштегі Титанның m_1 массасын (Сатурнмен салыстырғанда) елемей керек. Сонда:

$$\frac{T^2 M}{T_1^2 m} = \frac{a^3}{a_1^3}$$

бұдан шығатыны:

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{T}{T_1}\right)^2.$$

a -ны километрде және T -ны тәулікте өрнектей отырып, есептеу жүргізуге болады:

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{1222 \cdot 10^3}{9,54 \cdot 149,5 \cdot 10^6}\right)^3 \cdot \left(\frac{29,46 \cdot 365,26}{15,95}\right)^2 = \frac{1}{3500}.$$

Яғни Сатурн Күннен 3500 есе жеңіл.

5-есеп

Шолпанның ең жақсы кешкі көрінісі 5 ақпанда болды. Егер оның сидерикалық айналу кезеңі 225^d болса, келесі жолы Шолпан дәл осындай жағдайда қашан көрінді?

Шешуі: Шолпанның ең жақсы кешкі көрінісі оның шығыс элонгациясы кезінде пайда болады (оның Күн дискісінен шығысқа қарай ең үлкен бұрыштық қашықтығы). Екі дәйекті шығыс (мысалы, Батыс) элонгациясы арасындағы уақыт аралығы планетаның синодикалық айналу кезеңіне тең. Бұл есепті шешу үшін мына формуланы қолдану керек дегенді білдіреді:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{E} \Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{225} - \frac{1}{365} = \frac{365 - 225}{365 \cdot 225} = 587^d.$$

Яғни, дәл осы жағдайларда Шолпанның келесі кешкі көрінуі 587 күннен кейін, яғни келесі жылдың 14-15 қыркүйегінде орын алады.

Жұмыстың орындалу барысы:

1. Шолпанның айналуының синодтық кезеңі 584 тәулікке, ал оның орбитасының эксцентриситеті $e = 0,0068$ -ге тең. Планетаның Күнді айналып өтуінің сидерикалық кезеңін және планетаның Күннен орташа, перигельдік және афелийлік қашықтығын анықтаңыз.

2. Юпитердің айналуының синодтық кезеңі 399 тәулікке тең. Егер Юпитердің перигельдік қашықтығы $q = 4,95$ а.б. болатын болса планетаның Күннен орташа және афелийлік қашықтығын, оның Күннің айналысында айналуының сидерикалық кезеңін, сонымен бірге оның орбитасының эксцентриситетін анықтаңыз.

3. Веста астероидының Күнді айналып өту кезеңі 3,6 жыл. Вестаның Күннен орташа қашықтығы Жерден Күнге дейінгі орташа қашықтықтан неше есе көп?

4. Планетаның орбитасын шеңберге ала отырып, $25^\circ 5'$ -ке тең Күннен ең үлкен қашықтықта орналасқан кезде Меркурийдің Күннен қашықтығын табыңыз.

5. Егер Күннің массасы екі есе көп болса, 1 *а.б.* қашықтықта Жер Күннің айналасында қандай кезеңмен айналар еді?

6. Егер олардың орташа гелиоцентрлік арақашықтықтары сәйкесінше 0,723 *а.б.* және 3,10 *а.б.* тең болса, Шолпан планетасы мен Еуропа астероидының Күнді айналып өту кезеңдерін есептеңіз.

7. Егер Аполлон кіші планетасы және Икея кометасы Күнге жақын дерлік бірдей, Аполлонда 0,645 *а.б.*, ал Икеяда 0,633 *а.б.* тең болатын қашықтықта өтетін болса, алайда олардың орбиталарының эксцентриситеттері тиісінше 0,566 және 0,9933 болатын болса, олардың Күннің айналасында айналу кезеңдерін анықтаңыз.

8. Егер Икарда перигельдік қашықтық пен эксцентриситет 0,187 *а.б.* және 0,927-ге, ал Симеизада 3,219 *а.б.* және 0,181 болатын болса, Икар мен Симеиздің кіші планеталары қандай орташа және ең үлкен гелиоцентрлік қашықтықта қозғалады?

9. Планетаның айналасында $22^{\text{h}}37^{\text{m}}$ және $4^{\text{d}},518$ кезеңдерімен айналатын Сатурннан оның спутниктері Мимас пен Реяның орташа қашықтықтарын анықтаңыз. Планетаның ең үлкен спутнигі – Титан үлкен жартылай осі $1221 \cdot 10^3$ км болатын орбита бойынша $15^{\text{d}},945$ ішінде айналады.

10. Егер Күннің радиусы $696 \cdot 10^3$ км-ге тең болса, Күннің бетіндегі параболалық жылдамдықты есептеңіз.

11. Бұрынғы қашықтықта орналаса тұрып, Ай Жердің айнала екі тәулікте айналуы үшін, Жер массасы кенеттен қалай өзгеруі керек?

12. Айдың радиусы 1740 км-ге тең, ал оның массасы Жер массасының $1/81$ -не тең. Айдың бетіндегі секундтық маятниктің l ұзындығы қаншалықты үлкен және жердегі секундтық маятник айда қандай t' тербеліс ұзақтығына ие болар еді? Жердің бетіндегі ауырлық күшінің үдеуін $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Жердің радиусын $R = 6371$ км-ге тең деп алыңыз.

13. Юпитердің массасы Жерге қарағанда 317 есе, ал радиусы 11 есе көп екені белгілі болса Юпитердің бетіндегі ауырлық күшінің оның Жер бетіндегі шамасымен салыстырғанда үдеуін анықтаңыз?

14. Жердің массасы бір сәтте миллион есе азайса, жыл қаншаға ұзаратын еді?

15. Ай апогейде перигейге қарағанда $1/9$ -ға алысырақ. Перигейдегі толқын күші қанша пайызға үлкен?

Бақылау сұрақтары:

1. Лидий астероидтары әдетте әр 469 тәулікте, ал Инна астероиды әр 447 тәулік сайын қарсыласады. Бұл астероидтар Күннен Жерге қарағанда орташа есеппен қанша есе алыс?

2. 1975 жылғы 29 наурызда Жердің гелиоцентрлік бойлығы 187° -қа, Юпитердікі 1° -қа және Урандықы 210° -қа тең болғандығы белгілі. Егер орташа тәуліктік қозғалысы Жер үшін $0,986^\circ$, Юпитер үшін $4',98$ және Уран үшін $0',72$ -ге тең болатын болса, осы планеталардың ең жақын қарсыласу күнін анықтаңыз.

3. Егер Шолпанның ең үлкен батыс элонгациясы ($\Delta\lambda=47^\circ$) 1975 жылғы 7 қарашада болған болса, оның кезекті төменгі қосылу күнін анықтаңыз. Шолпанның орташа тәуліктік қозғалысы $1^\circ,602$ -ге тең.

4. 1975 жылғы 4 сәуірде Жердің айналасындағы орбитаға «Молния-3» байланыс спутнигі шығарылды. Егер спутник перигейлік қашықтығы 636 км және апогейлік қашықтығы 40660 км болатын эллиптикалық орбитаға шығарылғаны белгілі болса (Жердің радиусы 6370 км-ге тең деп алыңыз), оның гравитациялық үдеуі қандай шектерде өзгергенін анықтаңыз.

5. Жер-Ай жүйесінің масса орталығының орналасуын көрсетіңіз. Жердің радиусын 6370 км, Айдың массасын жер массасының $1/81$ бөлігіне тең және денелер арасындағы қашықтық 60 жер радиусына тең деп алыңыз.

6. Алдыңғы тапсырманың (№5) деректері бойынша осы денелерден гравитациялық үдеулер сандық түрде бір-біріне тең, бірақ қарама-қарсы бағытталған Жер мен Ай арасындағы тең тартылыс нүктесінің орнын анықтаңыз.

7. Жердің және Күннің тартылыс өрісіндегі Айдың гравитациялық үдеуін оның орташа геоцентрлік қашықтығы 384400 км болғанда есептеңіз. Қажетті мәліметтерді анықтамалық материалдардан алыңыз.

Әдебиеттер:

1. Телегина О.С. Астрономия. / Учебно-методическое пособие для практикума. – Костанай: КГПУ им. У.Султангазина, 2018. – 148с.

2. Шимбалев А.А., Гончар В.С. Лабораторный практикум по астрономии. / Белорусский государственный педагогический университет Имени Максима танка. 82с.

3. Жаңабаев З.Ж., Наурызбаева А.Ж., Ізтілеуов Н.Т. Жалпы астрономия: Жоғарғы оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті, 2010. – 184 б.

4. Кенжалиев Д.И. Астрономия: Жоғарғы оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы. – Алматы: Эверо, 2020. – 416 б.