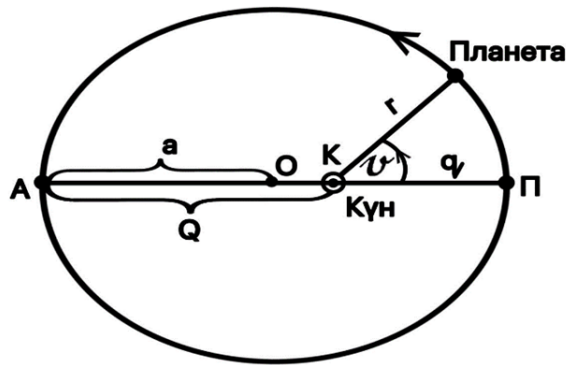


Практикалық жұмыс №6

Кеплердің эмпирикалық заңдары және планеталардың конфигурациясы

Планеталар Күнді эллипстік орбиталарда айналады, олардың бір фокусында Күн тұрады. Планетаның радиус векторы тең уақыт аралықтарында тең аудандарды сипаттайды. Планеталардың Күнді айнала айналуының жұлдыздық периодтарының квадраттары олардың эллипстік орбиталарының жартылай үлкен осьтерінің кубтарына пропорционал. Бірінші жуықтау ретінде негізгі планеталардың (Плутоннан басқа) орбиталары бір жазықтықта жатыр деп болжауға болады. Орбитаның жартылай үлкен осі a (1-сурет) өлшемдерді, ал эксцентриситет e - орбитаның ұзару дәрежесін анықтайды.



Сурет 1. Планетаның эллипстік орбитасының элементтері

Планетаның r радиус векторы эллипс теңдеуімен анықталады:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

және перигельдік қашықтықта өзгереді

$$q = CP = a(1 - e),$$

шынайы аномалия $\theta = 0^\circ$ болғанда, афелий қашықтығына дейін

$$Q = CA = a(1 + e)$$

$\theta = 180^\circ$ тең.

Планетаның Күннен орташа қашықтығы оның орбитасының жартылай үлкен осі

$$a = \frac{q + Q}{2}$$

Планеталар арасындағы қашықтық пен планеталардың Күннен қашықтығы әдетте астрономиялық бірліктермен (а.б.), бірақ кейде 1 АУ негізінде километрмен көрсетіледі. 1 а.б. = 149,6 · 10⁶ км.

Жұлдызды немесе сидеральды, екі планетаның T_1 және T_2 айналу кезеңдері олардың Күннен орташа A_1 және A_2 арақашықтықтарымен Кеплердің үшінші заңымен байланысты

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

мұндағы T_1, T_2 - планеталардың жұлдыздық орбиталық периодтары, a_1, a_2 - орбиталарының жартылай үлкен осьтері.

Егер орбиталардың жартылай үлкен осьтері Жерден Күнге дейінгі орташа қашықтықтың өлшем бірліктерімен (а.б.) және айналу кезеңдері T жылдармен өрнектелсе, онда Жер үшін $T_0 = 1$ жыл және $a_0 = 1$ а.б., ал кез келген планетаның Күн айналасындағы айналу периоды:

$$T^2 = a^3$$

Планетаның орташа орбиталық немесе айналмалы жылдамдығы

$$v_a = \frac{2\pi a}{T}$$

эрқашан км/с-пен көрсетіледі. Өйткені әдетте a - астрономиялық бірліктерде беріледі (1 а.б. = 149,6 · 10⁶ км) және T - жылдармен (1 жыл = 31,56 · 10⁶ с), бұл

$$v_a = \frac{2\pi a \cdot 149,6 \cdot 10^6}{T \cdot 31,56 \cdot 10^6} = 29,78 \frac{a}{T}$$

мұндағы T мына формулаға қойсақ $T^2 = a^3$

$$v_a = 29,78 / \sqrt{a} \approx 29,78 / \sqrt{a} \text{ (км/с)}$$

планетаның S айналуының синодтық кезеңінің орташа ұзақтығы синодтық қозғалыс теңдеуі бойынша T жұлдыздық периодымен байланысты:

T планетаның Күнді айналып өтуінің *жұлдызды* немесе *сидерлік* кезеңі оның синодтық айналу кезеңімен S тәуелділігімен байланысты:

төменгі планеталар үшін (Меркурий және Шолпан)

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}$$

жоғарғы планеталар үшін (Марс, Юпитер, Сатурн, Уран және Нептун):

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}$$

мұндағы T_0 – Жердің Күннің айналысында айналуының сидерлі кезеңі; $T_0 = 1$ жұлдызды жыл, яғни $T_0 = 365,26$ тәулік. Бұл синодтық қозғалыстың теңдеулері.

Орташа синодтық айналым кезеңі шамамен белгілі бір t_1 конфигурациясының белгілі бір конфигурациясының кезекті басталуының шамамен t_2 күнін есептеуге мүмкіндік береді, өйткені

$$t_2 \sim t_1 + S$$

Кез келген планеталық конфигурациялар мен олардың басталу күндерін эклиптикалық жазықтықта көктемгі күн мен түннің теңелу нүктесінен, яғни сағат тіліне қарсы айналу арқылы өлшенетін планеталардың гелиоцентрлік бойлық/планта бойынша есептеуге болады. Орташа тәулік ішінде планета орбита бойымен $\omega = 360^\circ/T$ доғасымен (планетаның орташа тәуліктік қозғалысы), ал Жер $\omega_0 = 360^\circ/T_0$ доғасынан өтеді (Жердің орташа тәуліктік қозғалысы), мұнда T және T_0 орташа күндермен өрнектеледі, $T > T_0$ және $\omega < \omega_0$.

Қажетті конфигурацияның t_2 күні планетаның гелиоцентрлік бойлығы

$$l_2 = l_1 + \omega (t_2 - t_1) = l_1 + \omega \Delta t$$

ал Жердің

$$l_{02} = l_{01} + \omega_0 (t_2 - t_1) = l_{01} + \omega_0 \Delta t,$$

бұдан, $\omega_0 - \omega = \Delta\omega$ және $(l_{02} - l_{01}) - (l_2 - l_1) = L$, аламыз:

$$\Delta t = L / \Delta\omega$$

және

$$t_2 = t_1 + \Delta t.$$

Төменгі планеталардың конфигурацияларын есептеу кезінде $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

Көрнекті ұзартылған орбиталар арқылы айналатын планеталардың Жермен ең үлкен жақындауы синодтық S және сидеральды T орташа орбиталық кезеңдердің M және n бүтін сандары арқылы қайталанады, өйткені

$$mS = nT.$$

Дәл осы формула планеталардың үлкен қарама-қайшылықтарының жиілігін анықтауға мүмкіндік береді.

Мысал 1.

1-есеп

Перигель мен афелий арақашықтықтарын, сидеральды және синодтық айналу кезеңдерін, сондай-ақ Поэзия кіші планетасының айналмалы жылдамдығын табыңыз, егер оның орбитасының жартылай осі мен эксцентриситеті 3,12 а.е. және 0,144 болса.

Берілгені: $a = 3,12$ а.е., $e = 0,144$.

Шешуі: $q = CP = a(1-e)$, $Q = CA = a(1+e)$ формулалары бойынша перигели арақашықтығы

$$q = a(1-e) = 3,12(1-0,144) = 2,67 \text{ а. б.}$$

ал афели арақашықтығы

$$Q = a(1+e) = 3,12(1+0,144) = 3,57 \text{ а.б.}$$

$T^2 = a^3$ формуласы сидеральды айналу периодын береді

$$T = a\sqrt{a} = 3,12\sqrt{3,12}; T = 5,51 \text{ жылда,}$$

мұндағы $\alpha > \alpha_0 = 1$ а.б., онда планета жоғарғы болып табылады, сондықтан оның S айналуының синодтық периоды $T_0 = 1$ жылда

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{T} \quad (\text{егер } P < T)$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{P} \quad (\text{егер } P > T),$$

формулалары бойынша есептеледі:

$$S = T/(T-1) = 5,51/(5,51-1); S = 1,22 \text{ жылда.}$$

$$v_a = \frac{2\pi a \cdot 149,6 \cdot 10^6}{T \cdot 31,56 \cdot 10^6} = 29,78 \frac{\text{а}}{\text{Т}}$$

бұл формула айналмалы жылдамдықты береді

$$v_a = 29,8/\sqrt{a} = 29,8/\sqrt{3,12}; v_a = 16,9 \text{ км/с.}$$

2-есеп

Нептунның синодтық айналу кезеңі 367,5 тәулікке тең, ал оның орбитасының эксцентриситеті $e = 0,0086$. Нептунның Күнді айналып

өтуінің сидерлі кезеңін және оның Күннен орташа, перигельдік және афелиялық қашықтығын анықтаңыз.

Шешуі: Нептун сыртқы планета болып табылатындықтан, онда айнарудың сидерикалық кезеңін анықтау үшін мына формуланы қолдану керек:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{T},$$

онда $E=1$ тең деп алып, ал S -ті жылдарда өрнектеу керек:

$$S = \frac{367,5}{365,26} = 1,0061 \text{ жыл.}$$

Енді есептеулерді жүргізуге болады:

$$\frac{1}{1,0061} = \frac{1}{1} - \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{1,0061} = \frac{0,0061}{1,0061} \Rightarrow T = \frac{10061}{61} = 165 \text{ жыл.}$$

Орташа қашықтық Кеплердің үшінші заңы бойынша орналасқан

$$165^2 = a^3 \Rightarrow a = 30,07 \text{ а.б. (астрономиялық бірлік).}$$

Перигелиялық және афелиялық қашықтық:

$$q = 30,07 (1 - 0,0086) = 29,81 \text{ а. б.}$$

$$Q = 30,07 (1 + 0,0086) = 30,33 \text{ а. б.}$$

3-есеп

Кейбір гипотезалық ішкі планетаның ең үлкен элонгациясы 16° -тан 30° -қа дейін өзгереді. Планета орбитасының жартылай осі мен эксцентриситетін, оның перигельдік және афелиялық арақашықтықтарын, сондай-ақ Күнді айналып өтудің сидерлі және синодтық кезеңдерін анықтаңыз.

Шешуі: Белгілі формулалар бойынша алдымен перигельді және афелиялық қашықтықты табуға болады:

$$q = 1 \cdot \sin 16^\circ = 0,276 \text{ а. б.}$$

$$Q = 1 \cdot \sin 30^\circ = 0,500 \text{ а. б.}$$

Үлкен жартылай ось былай есептеледі:

$$a = \frac{0,276 + 0,500}{2} = 0,388 \text{ а. б.}$$

Кеплердің үшінші заңы планетаның Күнді айналып өтуінің сидерикалық кезеңін анықтайды:

$$T = \sqrt{a^3} = 0,388 \cdot \sqrt{0,388} = 0,242 \text{ жыл} = 0,88 \text{ тәулік.}$$

Айналудың сидерлі кезеңнің алынған мәні бойынша планета ішкі болып табылады (оның орбитасы Жер орбитасының ішінде жатыр) деген тұжырым жасауға болады, содан кейін ішкі планета үшін синодтық айналу кезеңін анықтау формуласын қолдана отырып, S мәні алынады:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{0,242} - \frac{1}{1} = \frac{1 - 0,242}{0,242} = \frac{0,758}{0,242} \Rightarrow S = 0,319 \text{ жыл} \\ = 116 \text{ тәулік.}$$

Эксцентриситет мына формула бойынша табылады:

$$e = 1 - \frac{q}{a} = 1 - \frac{0,276}{0,388} = 1 - 0,711 = 0,289.$$

Алынған сандық мәндер бойынша гипотезалық планета Меркурий деген тұжырым жасауға болады (егер алынған мәндерді кесте мәндерімен салыстыратын болсақ).

4-есеп

Егер Сатурн планетасының массасы Жердің массасынан 95 есе, ал радиусы Жердің радиусынан 9,41 есе көп болса, оның бетіндегі параболалық (немесе сындық) жылдамдықты анықтаңыз.

Шешуі: Мыналар белгілі деп саналады: Жердің массасы $m_3 = 5,97 \cdot 10^{27} \text{ г}$, Жердің радиусы $r_3 = 6370 \cdot 10^5 \text{ см}$ және гравитациялық тұрақты $k^2 = 6,68 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$.

Параболалық жылдамдыққа арналған формула бойынша есептеулер жүргізу қажер:

$$v_K = \sqrt{2 \cdot 6,68 \cdot 10^{-8} \frac{95 \cdot 5,97 \cdot 10^{27}}{9,41 \cdot 6370 \cdot 10^5}} = \sqrt{2 \cdot 63204 \cdot 10^8} \\ \approx 365 \cdot \frac{10^4 \text{ м}}{\text{с}} = 35,6 \text{ км/с}$$

Салыстыру үшін: Жердің бетіндегі критикалық жылдамдық $v_K = 11,2 \text{ км/с}$.

5-есеп

Егер Сатурнның Күнді айналып өту кезеңі 29,46 жыл, ал оның орбитасының үлкен жартылай осі $a = 9.54 \text{ а.б.}$, Сатурнның спутнигі

Титан планетадан $a_1 = 1222 \cdot 10^3$ км орташа қашықтықта орналасқан және оның айналу кезеңі $T_1 = 15,95$ тәулік болса, Сатурнның массасы Күннің массасынан қанша есе аз екенін анықтаңыз.

Шешуі: Есепті шешу үшін Кеплердің жалпыланған үшінші заңы қолданылады:

$$\frac{T^2(M + m)}{T_1^2(m + m_1)} = \frac{a^3}{a_1^3},$$

онда M – Күннің массасы, m – Сатурнның массасы, m_1 – Титанның массасы. Бұл теңдеуде алымдағы Сатурнның m массасын (Күннің массасымен салыстырғанда) және бөлгіштегі Титанның m_1 массасын (Сатурнмен салыстырғанда) елемей керек. Сонда:

$$\frac{T^2 M}{T_1^2 m} = \frac{a^3}{a_1^3}$$

бұдан шығатыны:

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{T}{T_1}\right)^2.$$

a -ны километрде және T -ны тәулікте өрнектей отырып, есептеу жүргізуге болады:

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{1222 \cdot 10^3}{9,54 \cdot 149,5 \cdot 10^6}\right)^3 \cdot \left(\frac{29,46 \cdot 365,26}{15,95}\right)^2 = \frac{1}{3500}.$$

Яғни Сатурн Күннен 3500 есе жеңіл.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер:

1. Сатурн және Нептун планеталарының перигелий және афелий қашықтығын есептеңіз, егер олардың Күннен орташа қашықтығы 9,54 а.б. және 30,07 а.б. болса, ал орбиталардың эксцентриситеттері 0,054 және 0,008.

2. Екі планетаның қайсысы - Нептун ($a = 30,07$ а.б., $e = 0,008$) немесе Плутон ($a = 39,52$ а.б., $e = 0,253$) Күнге жақынырақ келеді? Жартылай үлкен ось және планета орбитасының эксцентриситеті жақшада берілген.

3. Оның радиус векторы орташа гелиоцентрлік қашықтыққа тең болатын планетаның шынайы аномалиясының мәндерін табыңыз.

4. Марстың орбитасының жартылай үлкен осі 1,52 а.б. тең және Күннен ең үлкен қашықтығы 1,66 а.б., ал Адониста 1,97 а.б. және 3,50 а.б. болса, Марс планетасы мен Адонис астероидының орбитаның эксцентриситетін және перигелий қашықтығын табыңыз,

тиісінше. Осы екі планетаның қайсысы Күнге жақын екенін көрсетіңіз.

5. Егер Икардың перигелий қашықтығы мен орбиталық эксцентриситет 0,187 а.б. және 0,827 а.б., ал Симейзада 3,219 а.б. және 0,181 а.б. болса, кішігірім планеталар Икар мен Симейз қандай орташа және ең үлкен гелиоцентрлік қашықтықта қозғалады? Осы планеталардың қайсысының радиус-векторы үлкен шектерде абсолютті және салыстырмалы түрде өзгереді?

Жауаптары:

1. 9,02 а.б. және 10,06 а.б.; 29,83 а.б. және 30,31 а.б.
2. 29,83 а.б. және 29,52 а.б., Плутон-жақын.
3. $v = \arccos(-e)$
4. 0,093 а.б. және 1,38 а.б.; 0,777 және 0,44 а.б. Адонис-жақын
5. 1,081 а.б. және 1,975 а.б.; 3,930 а.б. және 4,641 а.б.

Әдебиеттер:

1. Кононович Э.В., Мороз В.И. Общий курс астрономии: Учебное пособие /Под ред. В.В. Иванова. Изд. 2-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 544 с. (Классический университетский учебник).

2. Жаңабаев З.Ж., Наурызбаева А.Ж., Ізтілеуов Н.Т. Жалпы астрономия: Жоғарғы оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті, 2010. – 184 б.

3. Сырым Ж.С., Марат П.М. Астрономия пәнінен тапсырмалар мен жаттығулар: Оқу-әдістемелік құралы. – Орал: М.Өтемісов атын. БҚМУ РБО, 2020. – 88 б.

4. Кенжалиев Д.И. Астрономия: Жоғарғы оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы. – Алматы: Эверо, 2020. – 416 б.

5. Шимбалев А.А., Гончар В.С. Лабораторный практикум по астрономии. / Белорусский государственный педагогический университет Имени Максима танка. 82с.

6. <http://spacescience.ru/content/view/441/>