**Лекция 5**

**Метод наибольшего правдоподобия и метод моментов**

**нахождения оценок параметров**

Один из важнейших методов отыскания оценок параметров по данным выборки (метод наибольшего правдоподобия) был предложен Р. Фишером.

Этот метод состоит в том, что для получения оценки неизвестного параметра  нужно найти такое значение , при котором вероятность реализации случайного вектора

() (выборки) была бы максимальной. С этой целью "строится" функция, определяющая вероятность получения выборки  и находится точка максимума этой функции, которая и является оценкой неизвестного параметра.

Пусть случайный эксперимент описывается непрерывной случайной величиной , плотность распределения вероятностей  которой содержит неизвестный параметр а. Тогда вероятность получения при и независимых наблюдениях величины  выборки  всегда равна нулю, так как случайный вектор () с независимыми составляющими ,  имеет плотность распределения вероятностей вида

. (.2)

Вероятность отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю. Поэтому рассматривается вероятность попадания выборки в n-мерный параллелепипед с центром () и ребрами 

=

= (3)

и находится максимальное значение этой вероятности. Точка максимума вероятности (7.3) является точкой максимума функции (7.2). Функция  называется *функцией правдоподобия,* а величина *а*, являющаяся точкой максимума этой функции, оценкой, полученной методом наибольшего правдоподобия.

Таким образом, функция правдоподобия для непрерывной случайной величины *Х* определяется плотностями вероятностей наблюдаемой выборки , где

- плотность распределения вероятностей определенного вида (плотность вероятностей нормального, показательного распределений и т.д.) при 

Пусть *X* - дискретная случайная величина, заданная частотным рядом распределения (табл. 1):

Таблица 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  | …. |  |



неизвестным параметром - вероятностью появления события  при фиксированном значении параметра *а.*

Тогда вероятность того, что составляющие ,  к случайного вектора

() примут значения , причем значение  встречалось  раз, вычисляется по формуле

 (4)

Функция, определяемая соотношением (7.4), называется *функцией правдоподобия дискретной случайной величины* *Х*. Величина , являющаяся точкой максимума этой функции, называется оценкой неизвестного параметра *а*, полученной по методу наибольшего правдоподобия. Пусть функция правдоподобия дифференцируема по *а* и при любых возможных значениях , достигает максимума по *а* в интервале возможных значений *а*. Тогда, согласно известным правилам дифференциального исчисления, оценку  неизвестного параметра *а* распределения случайной величины *Х* находят, решая уравнение

 (5)

или систему уравнений

 , .6)

если требуется оценить *r*  неизвестных параметров.

Так как точки максимума функций  и  совпадают, иногда удобнее вместо уравнений (7.5) и (7.6) решать уранение

 

или систему уравнений





Приведем примеры функций правдопобия для конкретных распределений случайной величины *Х* .

**1.**Если *Х*  распределена нормально, то для нахождения оценок параметров  и σ используется функция правдоподобия



где , - наблюденные значения случайной величины *Х.*

**2.** Если *Х* имеет показательное распределение, то для нахождения оценки параметра  функцию правдоподобия определяют по формуле



где , - наблюденные значения случайной величины *Х*.

**3.** Если дискретная случайная величина *Х* имеет распределение Пуассона

 где 

то для оценки параметра *а* по результатам наблюденных значений, указанных в табл. 7.1, , испульзуется функция правдоподия

.

**4.** Если дискретная случайная величина Х имеет биномиальное распределение



то для оценки вероятности *р* появления события в каждом испытании по результатам наблюденных значений (см. табл. 7.1) рассматривается функция правдоподобия



Использование метода наибольшего правдоподобия приводит иногда к решению сложных систем уравнений, хотя в результате получаем состоятельные (иногда немного смещенные) оценки (смещение оценок устраняется введением поправок). Если существует эффективная оценка, то ее можно найти с помощью этого метода. Оценки наибольшего правдоподобия асимптотически эффективны и имеют асимптотически нормальное распределение.

**Пример 1.** Производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие *А* может произойти с вероятностью *р*. Известно, что событие *А* появилось в *m* испытаниях. Требуется оценить вероятность *р* появления события *А* в каждом испытании.

**Р е ш е н и е.** Рассмотрим дискретную случайную величину *Х* - число появлений события *А* в одном испытании. Ее распределение вероятностей задается таблицей

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 |
|  | *p* | *1-p* |

где *X* = 1 - событие *А* появилось в рассматриваемом испытании; *X*= 0 - событие *А* не появилось в рассматриваемом испытании. Неизвестный параметр - вероятность *р* - входит в распределение вероятностей дискретной случайной величины *Х*.

Выборка - набор из чисел нуль и единица, причем единица встречается

*m* раз, нуль – *n-m* раз.

Согласно формуле (4), функция правдоподобия имеет вид





Дифференцируя по параметру *р*, получаем уравнение



откуда находим единственное решение 

Таким образом, оценкой наибольшего правдоподобия вероятности события служит

его относительная частота в *n* независимых испытаниях.

Относительная частота m /n является:

**1)** несмещенной оценкой, так как *M (m/n*) = *Р*

**2)** состоятельной оценкой, так как, согласно закону больших чисел в форме Бернулли,



**3)** асимптотически нормальной оценкой в силу теоремы Муавра-Лапласа.

Метод моментов заключается в том, что статистические моменты выборки (формулы (6.7) и (6.8)) принимаются в качестве оценок для моментов распределения случайной величины *Х*, зависящих от неизвестных параметров. В свою очередь оцениваемые параметры могут быть выражены в виде определенных функций теоретических моментов. Заменяя теоретические моменты их оценками, т.е. статистическими моментами выборочного распределения, получаем оценки параметров. Заметим, что этот метод отличается простотою, хотя иногда приводит к малоэффективным и смещенным оценкам, т.е. оценки, найденные с помощью этого метода, не являются наилучшими из возможных. Например, пусть случайная величина *Х* распределена по экспоненциальному закону с плотностью вероятностей  содержащей неизвестный параметр *а*. Вычислив начальный момент первого порядка



и статистический начальный момент первого порядка



и приравнивая значения этих двух моментов, получим 1/а = , откуда *а* = 1/, т.е. оценку нашли, решив уравнение .