**Лекция 3.**

**Распределения непрерывных случайных величин, используемых в статистике:** *хи-квадрат, Стьюдента, Фишера-Снедекора, Релея, Вейбулла, Парето.*

Распределение (хи-квадрат). Из центрально предельной теоремы следует ,что среднее арифметическое для выборок ,взятых из генеральной совокупности имеющей нормальной закон распределения с М(Х) и σ(Х) распределено нормально с математическим ожиданием М(Х) и средним квадратическим отклонением σ(Х)/



Возникает задача о нахождении законов распределения статистической дисперсии . Для этого рассмотрим независимый центрированные случайные величины , распределенные нормально с математическим ожиданием (центром) ,равным нулю ,и дисперсией ,равной единице ,и исследуем закон распределения случайной величины

Которая называется случайной величиной с распределением и ν=n степенямисвободы . Очевидно ,что ≥0 и P(=0. Плотность вероятности случайной переменной, имеющей распределение и степеней свободы, выражается формулой

Где Г(а)- гамма-функция ,определяемая с помощью интеграла Эйлера :

На рис. 7.1 приведен график плотности вероятностей -распределения при числе степеней свободы = 1, 2, 6.

 Таким образом, распределение -зависит только от одного параметра - числа степеней свободы . И чем больше , тем более симметрично распределение , хотя некоторая правая асимметрия существует всегда.

Функия распределения имеет вид

По определению математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение соответственно равны :

Асимметрия и эксцесс распределения соответственно равны :

*;*

Отметим, что если n→ ∞ , то распределение отношения

стремится к нормированному нормальному закону распределения.

Это распределение непосредственно связано с распределением статистической дисперсии выборки. Статистическая дисперсия, как было указано в § 6.2, вычисляется по формуле

*.*

Справедливо следующее утверждение: если - независимые нормально распределенные случайные величины с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями, то случайная переменная имеет распределение с степенями свободы.Поэтому при нахождении вероятности того, что дисперсия выборки

 примет значение, принадлежащее определенному отрезку [ а; b ] ,выражение a≤ ≤b преобразуется к виду и используется

распределение величины причем

Так как плотность вероятности для распределения вычислить сложно, то составлена таблица (см. прил. 6) , в которой для различных значений приводятся квантили - распределения ,т.е такие значения , при которых

Где -заданный уровень вероятности .

При >30 применяют формулу

где z определяется из уравнения Распределение играет важную роль в проверке статистических гипотез (см. гл. 8).

**Распределение** **Стьюдента**. При статистической оценке " параметров распределения и статистической проверке гипотез широко используется распределение Стьюдента.

Случайная величина

,

Где - центрированная случайная величина с нормальным распределением, центр которого равен нулю, а дисперсия 1; - случайная величина с распределением и v = n степенями свободы, называется случайной величиной Стьюдента с v = n степенями свободы. При указанных условиях плотность вероятности величины Стьюдента имеет вид

.

Функция распределения Стьюдента

График, иллюстрирующий ее, изображен на рис. 7.2.

Как видно из рисунка, кривая симметрична относительно оси ординат и, следовательно, М (t) = 0, а для больших значений v очень близка к





центрированной нормальной кривой. При малых значениях v кривая значительно отличается от центрированной нормальной кривой - более медленно спускаясь к оси абсцисс. Сопоставление кривых плотностей цетрирован ного нормального распределения и распределения Стьюдента приведено на рис. 7.3.

Для распределения Стьюдента в прил. 5 приведены значения квантилей зависимости от числа и степеней свободы и заданного уровня вероят ности а. Эти квантили находят при решении уравнения

С геометрической точки зрения нахождение квантилей заключается в выборе такого значения при котором суммарная площадь за штрихованных на рис. 7.3 криволинейных трапеций была бы равна 𝛼. При 𝜈 ≥50 вместо таблицы распределения Стьюдента можно использовать таблицу центрированного нормального распределения, так как при 𝜈 → ∞ функция распределения Стьюдента сходится к функции нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице. Укажем два частных случая переменных, имеющих распределение Стьюдента и широко применяемых на практике. Сформулируем теоремы.

Теорема 7.1. Если - независимые случайные величины, рас пределенные нормально с математическим ожиданием т и средним квадрати ческим oклонением ϭ, то случайная величина

где имеет распределение Стьюдента с v = n – 1 степенями свободы,

 Справедливость теоремы 7.1 следует из того, что

;

случайная величина распределена нормально с центром, равным нулю, **σ=1, а случайная величина имеет распределение c степенями свободы.**

***Теорема 7.2. Если соответственно средние арифметические и статистические дисперсии в выборках , состоящих из и независимых наблюдений , случайно отобранных из нормальных совокупностей с одинаковым средним квадратическим отклонением, то при взаимный независимостей обеих выборок случайная переменная***

***Имеет распределение Стьюдента с степенями свободы.***

**Действительно, так как дисперсия одна и та же в генеральных совокупностях, то величины**

 **и**

**Имеют -распределение с и степенями свободы . Тогда легко доказать, что их сумма**

**Имеют -распределение с степенями свободы , а величина распределено нормально с параметрами 0 и , поэтому величина**

распределена нормально с параметрами 0 и 1. А отношение имеет распределение Стьюдента с степенями свободы.

**

Распределение Фишера . Рассмотрим случайную величину

где U и V имеют х²- распределение с и степенями свободы. Тогда случайная величина F имеет распределение Фишера с и степенями свободы.

Плотность вероятности случайной величины F имеет вид

График плотности вероятностей распределения Фишера изображен на рис. 7.4.

В таблице распределения (см. прил. 7) для различных значений уровня вероятности 𝛼 и различных сочетаний и даются значения F𝛼, найденные из уравнения

В дисперсионном анализе Фишера используется случайная величина

Для которой справедлива

Теорема 7,3 . Если - статистические дисперсии ,где

Определяемые в выборах объемов и ,взятых из нормальных совокупностей с одинаковыми средними квадратическими отклонениями ,то случайная величина / имеет распределение Фишера-Снедекора с =-1 и = -1 степенями свободы.

 Действительно,

И случайные величины

Имеют -распределение с и степенями свободы .Тогда отношение / имеет распределение Фишера.

Функция распределения случайной величины F называется также F-распределением с и степенями свободы.