**13 – тарау**

**АКТИВТЕРДІҢ БАҒА БЕЛГІЛЕУ МОДЕЛЬДЕРІ**

Ертеңгі бағаны білуден ешкім бас тартпас еді. Қаржы мамандары арасында бағалар ырғақ, цикл, тренд бойынша өзгеретіні туралы айтылады. Қазіргі заманда бүкіл әлемді біртұтас қылатын компьютерлік техника және компьютерлік желілер дамығаны сонша тіпті бағалардың дәл қазіргі уақыттағы мінез-құлығын компьютердің экранынан көруге болады. Техникалық талдау бойынша бағалар графиктерінің кейбір бөліктері қайталанады, сондықтан осындай бір өзгеше пішіннің бастапқы бөлігінен графиктің қалай өзгеретінің білуге болады. Бағалардың мінез-құлығын болжау осыдан тұрады.

Бағалардың өзгеруі болжамды ма, жоқ па деген сұраққа жауап беру мақсатымен көптеген зерттеулер жүргізілген. Олар күтпеген нәтижелерді көрсетті: броун қозғалысындағы газ молекулаларының жылдамдығы өзгергендей, бағалардың өзгеруі де кездейсоқ сияқты. Бұл сұрақ толығымен шешілмеген және ешқашан шешілмейтіні көрінеді, өйткені өздерінің бағалар мінез-құлығын болжай алатындарына сенімді сәтті қаржы мамандары қайта-қайта пайда бола береді.

Осы тарауда баға белгілеудің үш моделі қарастырылған. Бұл модельдерде актив бағалары уақыт бойынша кездейсоқ өзгереді. Алғашқы екі модель өте оңай – баға ауытқуының тек екі мәні бар, сондықтан да олар биномиалды деп аталады. Осы модельдердің негізінде күрделі, тәжірибелік қосымшалары бар, тіпті қаржылық есептерде қолданылатын модельдер құрылды.

**13.1. Жай биномиалды модель**

Бұл модельдегі *S* – өтелетін облигация (өтейтін мезетте облигация бағасы оның номиналына тең болады) бағасындай ешқандай арнайы шектеуліктер қойылмаған активтің бағасы, мысалы акцияның бағасы. Уақыт аралығының бірлігі – бір күн болсын. Сонда *n*-ші күннің соңында актив бағасы болады, мұндағы *S0* – қадағалаудыңбасындағы баға, xi, i=1,…n – ½ ықтималдығымен -1 ден +1 ге дейінгі мәндерді қабылдайтын тәуелсіз және бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар. Актив бағасының болар мінез-құлығы 13.1 суретінде көрсетілген.



13.1-ші сурет

Мұнда биномиалды ағаш суреттелген. Бағаның мінез-құлығын осы ағаштың сол жағынан оң жағына қарай кездейсоқ қозғалыс ретінде елестетуге болады.

 кездейсоқ шамасының математикалық күтімі мен дисперсиясын табайық. Сонда

,

өйткені әр  кездейсоқ шаманың математикалық күтімі 0 тең.

 кездейсоқ шамаларының тәуелсіз болғандығынан олардың қосындысының дисперсиясы дисперсиялардың қосындысына тең. Ал әр  кездейсоқ шаманың дисперсиясы 1 тең болғандықтан, .

 қосындысын  деп белгілейік.  үлестірілген қатарын табайық. Жалпы саны *n* тең  кездейсоқ шамаларының k данасы +1 мәнін, ал қалған *(n- k)* кездейсоқ шамалары -1 мәнін алатынының ықтималдығы. Демек .  үлестірілген қатарлары 13.2 суретінде көрсетілген.

13.2 – ші сурет

*n>10* болған кезде орталық шектік теореманы (саны үлкен тәуелсіз және бірдей үлестірілген қосындылардың сомасы нормал заңы бойынша үлестірілген) қолдануға болады. Сонымен, егер *n*>10 болса, мұндағы Ф – Лаплас функциясы. Демек, .

Мысалы,  тең болса . Басқа сөзбен айтқанда, 16 күннің ішінде бағаның өзгеруі 12 бірліктен аспайды (*S0*  12 артық деп алынады).

Бұл жай биномиалды моделде бағалар өтеу уақыты жақындаған кездегі купонсыз облигацияның бағалары сияқты жүйелі түрде өсе алмайды. Актив табысының математикалық күтімі 0 тең болатыны анық. Сондықтан тәуекелсіз мөлшері де 0-ге тең болуы тиіс (көптеген бақылаулар бойынша, тәуекелді актив табысының математикалық күтімі тәуекелсіз мөлшерден төмен болуы мүмкін емес).

Мұның бәрі қарастырылып жатқан модельді тек кейбір айқындауыш көрнекі есептер үшін ғана қолданбалы етеді (§14.4 қараңыз).

**13.2. Кокс-Росс-Рубенштейн биномиалды моделі**

Бұл модельде активтердің екі түрі бар: *r* пайыз мөлшері тұрақты *В* өлшемді банк есепшоты (*n* –ші уақыттық аралықтың соңына қарай оның шамасы  тең) және *fi* арттыру мөлшері кездейсоқ *S* бағалы актив, мұндағы *fi* мөлшерлер *a, b* (1/2 ықтималдығымен *a<b*) мәндерін қабылдайтын тәуелсіз және бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар, демек пайыз мөлшері құбылмалы (§9.1 қара). *n* уақыт мезетінде актив бағасы .

Дербес жағдайда,  болған кезде



Ықтималдығы ½ кездейсоқ шаманы енгізетін болсақ.

Бұл жағдайда актив бағасы *S * жиынында «шарлайтыны» анық – 13.3 суретін қара.



13.3-ші сурет

Актив табысының математикалық күтімі *(a+b)/2 ,* демек *(a+b)/2>r.* Актив бағасы орта есеппен осы мөлшер бойынша өсетінін дәлелдейік. *n-*ші уақыт мезетінде бағаның математикалық күтімі  тең. *(1+ fi), i=1,…n* кездейсоқ шамалар тәуелсіз болғандықтан, көбейтіндінің математикалық күтімі олардын математикалық күтімдерінің көбейтіндісіне тең болады, сонда

 (13.1)

Егер *fi* мөлшерлері тұрақты емес *n* байланысты өзгеретін болса да (13.1) формуласы дұрыс болады.

**13.3. Жалпы экспоненциалды биномиалды модель**

Бағалардың мінез-құлығын зерттеу барысында, бағалардың өздері емес олардың логарифмдерінің «кездейсоқ шаралайтындары» анықталды, яғни



Мұндағы , алкездейсоқ шамалары тәуелсіз және «шамамен бірдей».

Орталық шектік теорема бойынша *n>10* болған кезде  шамалары нормал заңына жуық үлестіріледі. Бұл заңның параметрлері, яғни математикалық күтім мен дисперсия кездейсоқ шамаларының математикалық күтімдері мен дисперсияларымен анықталады. «Дискреттік» уақытты «үзіліссізге» ауыстырайық. Онда кез келген уақыт мезеті *t* және кез келген *T>t* үшін  бағалар қатынасының натурал логарифмі нормал заңы бойынша үлестіріледі.

Егер кездейсоқ шаманың натурал логарифмі нормал заңы бойынша үлестірілген болса, кездейсоқ шаманың өзінің үлестірілуі *логнормал* деп аталады. Логнормалды үлестірудің тығыздық графигі 13.4 суретте көрсетілген.



13.4-ші сурет

Егер  параметрлі lnY нормал заңы бойына үлестірілген болса  және дәлелдеуге болады.

Жалпы биномиалды моделде кез келген уақыт аралығы арқылы бағалар қатынасы логнормал болып үлестірілген.  дегеніміз арттыру коэффициенті немесе көбейткіші ретінде түсінілетін (бұл табыстылықты анықтайтын нұсқаларының бірі - §5.1) уақыт аралығындағы орташа табыстылық. Сондықтан, кез келген уақыт аралығында орташа табыстылық логнормалды үлестірілген.

Бірақ бұл болжамдардың тәжірибедегі сенімді сәйкестігі байқалмайды.

**13.4. Бағалардың іргелі және техникалық талдауы**

*Іргелі талдау* нарықтағы жалпы экономикалық үрдістерді талдау мен зерттеуден және нарықтың дамуына ықпал ететін факторлар мен жасырын өзара байланыстарды анықтаудан тұрады. Іргелі талдауда баспада жарияланған немесе электронды түрдегі статистикалық деректер қолданылады. Экономика математикалық әдістер мен модельдер кең қолданылады.

Көбіне іргелі талдау сандық емес сапалық болып табылады. Ол тек белгілі өзара байланыстардың басы мен бағытын анықтауға көмектеседі. Әдетте, анығырақ қорытындылар үшін қосымша зерттеулер қажет болады.

*Техникалық талдау* нарықтың дәл осы сәттік талдау және оның мінез-құлығының қысқа мерзімді аспектілерін анықтау үшін жүргізіледі. Техникалық талдау диаграммаларды құрудан, қазір ғана жасалған келісімшартты зерттеуден және т.б. тұрады. Бәрінен бұрын техникалық талдау ең жақын аралықтағы бағалардың өзгеруін болжау мақсатымен белгілі бір актив бағаларының динамикасын зерттеуге бағытталады. Ол үшін бағаның өзгеруі көрсетілген графиктерінде белгілі пішіндерді тауып («бас пен иықтар», «қос төбе», және т.б.), бағаның осы пішін бойымен жүру болжамымен әрекет етеді.

**Сұрақтар мен есептер**

1. Қарапайым § 13.1-дегі биномиалды модельдерден анықтаңыз: а) 1 күнде; 2 күнде; 3 күнде; баға бастапқыдан аз болуының; б) 2 күн, 3 күн бойында өзгеріссіз қалуының; в) 1 күннен кейін; 2 күннен кейін; 3 күннен кейін сондай болып қалуының ықтималдығы қандай?

2. Қарапайым §13.1-дегі биномиалды үлгілердегі баға өзінің өткені "есінде жоқ", яғни оның кездейсоқ бағыт алысы марков процессі екенін дәлелдеңіз. Бұл график түрінде осылай көрсетіледі: биномиалды ағашында кез-келген бұтақтан өсіп шығатын болашақ ағаш ары қарай алғашқы биномиалды ағашқа изоморфты.

3. Дүкеннің иесі аптаның ішінде онда баға тұрақты болғанына мақтанады. Ол айтады: «мен бағаны "дүйсенбіде" жағдайға қарай тағайындаймын. Одан кейін, егер көрнекті ештеңе бола қоймаса, мен оларды өзгертпеуге тырысамын». Үстірт сипаттама: егер өткен *п* күнде бағаның *k* өзгерісі болса, онда бағаның ертеңге өзгермеуінің ықтималдығы -ға тең. Осындай бағалар өзінің өткенін "еске сақтайтынына" көз жеткізіңіз.

 4. Қарапайым § 13.1-дегі биномиалды үлгілерден кенздейсоқ шаманы Cn = max(0, Sn – So) анықтаймыз. *C*1, *C*2, *C*3 кездейсоқ шамаларүшін үлестіру қатарларын құрыңыз.

**Ескерту.** Осындай кездейсоқ шамалар (14 тарауды қараңыз) опциондардың бағасын құру теориясында маңызды рөл ойнайды.

5. Қарапайым § 13.1-дегі биномиалды модельдегі бақылаушы бағаны бір күннен кейін бақылайды. Ол үшін мүмкін болатын бағалардағы жиыны қалай болып көрінеді ?

 6. *а* = 0, *b =* 0,1,So= 10 болғанда Кокс-Росс-Рубинштейн (КРР) биномиалды моделіндегі активтердің мүмкін болатын бағасының ағашын *п* = 5-ке дейін суретте салыңыз. Осы модельдегі активтің мүмкін болатын ең үлкен бағасы қандай? *п* = 5-ке қарай баға 10, 11-ден артық емес, 12-ден артық емес болуының ықтималдығы қандай? Баға *п*-ші кезеңде бастапқы бағадан артық болуының ықтималдығын табыңыз. *n* = 1, 2 кезіндегі актив бағасының математикалық күтімін табыңыз.

 **7.** Бағаны жоғарылату және төмендету ықтималдығы -ге тең емес болғанда ең қарапайым § 13.1-дегі биномиалды үлгілерге ұқсас үлгіні қарастырыңыз.

 8. 7-ші пункттегі сияқты КРР үлгісі бойынша.

 9. КРР үлгісінде *а* = -0,1, *b* = 0,3болсын*.* *п* ( >10 ) *Sn* > *S*o (*S*o-ді жеткілікті үлкен деп есептеңіз) жеткілікті үлкен болғандағы ықтималдықты табыңыз.

10. Жалпы "дискретті" уақытты экспоненциалдық үлгідегі (13.1) формула қандай болады?

11. Бағалардың қатынасының логарифмі уақыттың бірлік аралығында параметрлері *а* және  болатын нормал заңы бойынша үлестірілген және бағалардың бет алысы қиылыспайтын уақыт аралығында тәуелсіз деп жориық. Бағалар қатынасынан логарифм үлестірілуі *п* бірлік уақыт аралықтары арқылы табыңыз. Бастапқы *S*o бағасын бекітілген деп есептеп, *Sn* бағасының математикалық күтімі мен дисперсиясын табыңыз.

 12. *S*o = 100 активінің бастапқы бағасы бірлік уақыт аралығында 3-ке өседі немесе 1-ге  ықтималдығымен кемиді дейік. *n* > 10 болса, баға *Sn*  > *S*o  болуының ықтималдығын табыңыз.

 13. Қарапайым триномиалды моделінде активтің бағасы *n*-ші күннің соңында *Sn* = *S*o + *x*1 + … + *xn* болады, мұндағы *S*o бақылаудың басындағы баға, ал *xi*, *i* = 1, …, *n*, – -1, 0, +1 мәндерін қабылдайтын ықтималдығы -ге тең тәуелсіз және бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар болумен қарапайым биномиалды үлгіден айырмашылығы болады. Активтің мүмкін болатын бағасының бет алысын 13.5-ші суреттегідей бейнелеуге болады.



13.5-ші сурет

Бұл график триномиалды ағаш деп аталатынды суреттейді. Бағаның бет алысын кездейсоқ қозғалыс ретінде бұл ағаш бойынша солдан оңға қарай көрсетуге болады.

Қарапайым биномиалды үлгі үшін § 13.2.-де жасалғанға ұқсас етіп қарапайым триномиалды үлгіні зерттеңіз.