**11 – тарау**

**ЫҚТИМАЛДЫҚ ҚАРЖЫЛЫҚ ОПЕРАЦИЯЛАРДЫҢ СИПАТТАМАЛАРЫ**

Егер қаржылық операцияның әр шешімінің ықтималдығы бар болса, мұндай операция ықтималдық қаржылық операция деп аталады. Мұның табыстылығы – соңғы және бастапқы ақшалай бағаларының алымына тең кездейсоқ шама. Осындай операцияда біздің интуициямызбен келісетін тәуекелдің сандық бағалауын енгізуге болады.

* 1. **Тәуекелдің сандық бағалауы**

Алдыңғы тарауда тәуекелді операцияның анықтамасы ШҚТ-ның қалаушылық жүйесінде тең бағалы емес, кемінде 2 қорытындысы бар операция деп берілген. Осы тарауда ШҚТ-ның орнына «инвестор» деген терминді немесе ұқсас басқасын да, бастысы, операцияның жетістігіне қызығушылық танытатын тұлғаны білдіретін терминді қолдансақ болады.

Операцияның тәуекелін зерттеген кезде іргелі тұжырыммен танысамыз.

**Тұжырым.** Операция тәуекелінің сандық бағасы тек операцияның көптеген қорытындыларының ықтималдық сипаттамасында ғана мүмкін.

**Мысал 1.** Екі ықтималдық операцияны қарастырайық:



Бірінші операцияның тәуекелі екіншіге қарағанда кем болғаны анық. Ал ШҚТ қай операцияны таңдайтыны тек оның тәуекелге деген бейімділігіне байланысты.

* 1. **Бөлек операцияның тәуекелі**

Операцияның тәуекеліне сандық баға беру операцияның ықтималдық сипаттамасыз мүмкін емес, сол үшін операцияның қорытындыларына ықтималдықтарды жазып, әр қорытындыны ШҚТ алатын табыспен бағалайық. Нәтижесінде *Q* кездейсоқ шамасын аламыз, оны операцияның кездейсоқ табысы деп немесе *кездейсоқ табыс* деп атаймыз. Дискретті кездейсоқ шамамен шектелейік:



Мұндағы *qj*– табыс, ал *pj*– осы табыстың ықтималдығы.

Операцияны және оны білдіретін кездейсоқ шама – кездейсоқ табысты бірдей деп санап, қажет болғанда белгілі бір нақты жағдай үшін екі терминнің ыңғайлысын қолданамыз. Енді ықтималдық теориясын қолданып, операцияның келесі сипаттамаларын табуға болады.

*Орташа күтілетін табыс* – *Q* кездейсоқ шамасының математикалық күтімі, яғни , кейде  деп белгіленіп, операцияның тиімділігі деп аталынуы да мүмкін.

*Операцияның дисперсиясы* – *Q* кездейсоқ шамасының дисперсиясы, яғни , кейде *DQ*деп белгіленуі де мүмкін.

*Q* кездейсоқ шамасының *орта квадраттық ауытқуы* , немесе .

Орташа күтілетін табыс, немесе операцияның тиімділігі, орта квадраттық ауытқу және табысы бірдей бірліктерде өлшенеді.

Кездейсоқ шаманың математикалық күтімінің іргелі мағынасын еске сала кетейік.

Ұзақ тәжірибелер сериясында кездейсоқ шамамен қабылданған мәндердің арифметикалық ортасы шамамен оның математикалық күтіміне тең.

Бүкіл операцияның тәуекелділігін *Q* табысы кездейсоқ шамасының орташа квадраттық ауытқумен бағалау көпшілікпен мойындалған, яғни  арқылы. Осы кітапта бұл тәуекелдің негізгі сандық бағалауы болып табылады.

Сонымен, операцияның тәуекелі деп  - *Q* операцияның кездейсоқ табысының орташа квадраттық ауытқуы аталады.  деп белгіленеді.

**Мысал 2.** 1 мысалдағы бірінші және екінші операцияларының тәуекелдерін табайық:



Алдымен *Q*1 кездейсоқ шаманың математикалық күтімін есептейік: ,енді  формуласы бойынша дисперсияны есептейік. , демек  және  тең. Екінші операция үшін . «Интуициямыз берген кеңесіндей» бірінші операцияның тәуекелі төмен.

Мұнда келтірілген тәуекелдің сандық бағалау операцияның қорытындыларының шашырау деңгейі ретінде тәуекелдің интуициялық түсінігімізге сәйкес келеді, өйткені дисперсия және орта квадраттық ауытқу дегеніміз осы шашырауды білдіреді.

**Мысал 3.** ШҚТ екі ойынды қарастырады. Бірінде тиын лақтырады, егер ол таңба жағымен түссе, ШҚТ 10 ақша бірлігін алады, егер цифр жағымен түссе – 10 ақша бірлігін төлейді. Бұл ойынның төлемдері сол жақтағы үлестірілген қатарды құрады.



Екінші осында ойын сүйегін лақтырады да, ШҚТ-ның төлемдері оң жақтағы үлестірілген қатарды құрады.

Екі жағдайда да орташа күтілетін табыс 0-ге тең. Бірақ екінші ойынның шашырауы көбірек. Мұны дисперсияның және тәуекелдің мәндері дәлелдейді.





*Q* операцияның орташа күтілетін табысы, яғни $m\_{Q}$ тиімділігі мен  тәуекелі белгілі Чебышев теңсіздігімен байланысты:

 немесе 

Бірақ бұл теңдеу тәжірибеде көп қолданбайды.

Егер операцияның табысы нормал заңы бойынша үлестірілген кездейсоқ шама болса, тәуекел тиімділікпен байланысты ықтималдықтарды нақты көрсетеді:

. Кейде бұл бағалар пайдалы болады.

Тәуекел жайында келесі тұжырымдар ықтималдық теориясындағы дисперсия және орташа квадраттық ауытқу тұжырымдарының салдары болып табылады.

***Тұжырым А.*** Операцияның ауқымы *k* есе үлкейгенде, яғни кездейсоқ табыстың барлық мәндері *k* есе үлкейгенде, операцияның тиімділігі *k* есе, ал тәуекелі  есе үлкейеді.

***Тұжырым В.*** Бүкіл табыстарды тұрақты бір санға үлкейткенде, операцияның тиімділігі де сол санға ауысады, ал тәуекелі өзгермеді.

***Тұжырым С.*** *Q*1, *Q*2 корреляциянбаған операциялар болса олардың қосындысының дисперсиясы дисперсиялардың қосындысына тең, сондықтан қосынды операцияның тәуекелі .

***Тұжырым D.*** Екі кез келген *Q*1 және *Q*2  операциялар үшін қосынды операцияның тәуекелі , мұндағы - операциялардың кездейсоқ табыстар корреляцияның коэффициенті, . Егер  , операцияның табыстары оң корреляцияланған болса, қосынды операцияның тәуекелі артық болуы мүмкін, ал егер  , табыстары теріс коррелцияланған болса, операция тәуекелі  ден кем болады.

Еске сала кетейік, X, Y кездейсоқ шамалардың корреляциялық моменті, , 0 тең болса, олар корреляцияланбаған деп аталады;  корреляциялық моменті және корреляциялық коэффициенті бір бірімен келесі формула арқылы байланысады; тәуелсіз кездейсоқ шамалар корреляцияланбаған.

**Мысал 4.** *Q*1 және *Q*2  операциялары корреляцияланбаған болсын. *Q*  операциясының тәуекелін табайық, ,



Екі операцияның тәуекелдері 2 мысалда табылған:  және . Демек .

***Тәуекелдің басқа өлшеуіштері.*** Біздің ойымызша, орташа квадраттық ауытқу операция тәуекелінің ең жақсы өлшеуіші болып табылады. 10 тарауда айқындалмаған жағдайдағы шешім қабылдаудың классикалық схемасы және бұл схемадағы тәуекелді бағалау қарастырылған. Тәуекелдің басқа да өлшеуіштерімен танысқан пайдалы болады. Көбіне өлшеуіштер деп ұнамсыз оқиғаларды атайды.

* 1. **әуекелдің кейбір жалпы өлшеуіштері**

*Q*  операциясының кездейсоқ табысының үлестіру функциясы *F* белгілі болсын дейік. Оны білетін болсақ келесі сұрақтарға жауап берейік

1. Операцияның табысы белгілі *s*-тен төмен болатынының ықтималдығы қандай? Басқа сөзбен айтқанда: тапқан табыстың берілгеннен кем болуының тәуекелі қандай? *Жауабы: F(s).*
2. Операцияның табысты болмайтынының ықтималдығы қандай, яғни оның табысы m орташа күтілетін табыстан кем болуының ықтималдығы? *Жауабы: F(m).*
3. Залалдың ықтималдығы және оның орташа күтілетін мөлшері қандай? Немесе залалдың тәуекелі мен бағалауы қандай?
 Ж а у а б ы. *F(0)*, 
4. Орташа күтілетін залалдың орташа күтілетін табысқа деген қатынасы қандай? Егер ШҚТ операцияға бүкіл ақшасын салса бұл қатынас неғұрлым кем болса, соғұрлым ойсыраудың тәуекелі төмен болады.

Ж а у а б ы. 

Операцияларды талдағанда ШҚТ табыстың көбірек, ал тәуекелдің азырақ болғанын қалайды. Осындай оптимизациялық есептер екі-өлшемді деп аталады. Олардың талдауындағы екі өлшем табыс пен тәуекел бір өлшемге айналады. Осылай *операцияның салыстырмалы тәуекелі* деген түсінік пайда болады. Операцияның тәуекелін өлшейтін  орташа квадраттық ауытқуының бір мәні орташа күтілетін табыстың шамасына байланысты әркезде әрқалай қабылданады, сондықтан / шамасын операцияның салыстырмалы тәуекелі деп атайды. Мұндағы тәуекелдің өлшемін екі-өлшемді есептің орамы ретінде түсінсе де болады:



Демек, бір мезгілде тәуекелді минимизациялап тұрып орташа күтілетін табысты максимизациялау.

* 1. **Ойсырау тәуекелі**

Осылай ШҚТ өтей алмайтын, яғни оның ойсырауына әкелетін, тым көп шығысындарды атайды.

**Мысал 5.** *Q*  операциясының кездейсоқ табысы келесі үлестірілген қатармен берілсін, ал 35-тен артық шығындар ШҚТ-ны ойсырауға әкелсін дейік. Осы операция нәтижесіндегі ойсырау тәуекелі 0,8-ге тең болады:



Ойсырау тәуекелінің салмақтығы сәйкес ықтималдығының шамасымен бағаланады. Егер ол өте кем болса, жиі оны елемейді (өйткені қаржылық нарықтағы, мемлекет ішіндегі болатын апатты оқиғалар, немесе табиғи құбылыстар және т.б. себепті әр келісімнің ойсырау ықтималдығы 0-ден үлкен болады).

**Мысал 6.** ШҚТ $40 000 қарыз болды. Дегенмен оның 300 000 руб. салымы болды. Бұл 1 доллар үшін 6 руб. курсында оның қарызынан асатын. 0,01 ықтималдығымен рубльдің үш есе девальвациясы болды. ШҚТ ойсырады, өйткені қарызының шамамен $25 000 өтей алмады.

* 1. **Қатынас түріндегі тәуекелдің көрсеткіштері**

Егер ШҚТ-ның қаражаты С-ға тең болса, шығындары Y С-дан артық болған кезде, ойсырау тәуекелі пайда болады. Оны болдырмас үшін тәуекел коэффициенті аталатын  қатынасын  санымен шектейді. Коэффициенті  асатын операцияларды қалыпты деп атайды. Жиі Y шығындарының р ықтималдығын ескереді, бұл жағдайда  тәуекел коэффициентін қарастырады және оны  санымен шектейді ( болатыны анық). Қаржылық менеджментте  және  шектеліп тәуекелдерді өтейтін коэффициенттер деп аталатын  және  кері қатынастары қолданылады.

Кук коэффициентінің мағынасы дәл осындай:

$\frac{Жеке қаражат}{тәуекел ескертілген активтер}$

Кук коэффициентімен банктер және басқа да қаржылық компаниялар қолданады. Мұнда салмақтық рөлін ықтималдықтар атқарады – сәйкес активтің шығысының тәуекелі.

**11.6. Несие тәуекелі**

Осылай алынған несиені уақытылы өтемеудің ықтималдығы аталады.

**Мысал 7.** Банктен несие алу статистикасы келесідей: 10% – мемлекеттік органдар, 30% – басқа банктер және қалғанының бәрі жеке тұлғалар. Алынған несиені уақытылы өтемеудің ықтималдықтары сәйкесінше 0,01; 0,05; 0,2. Кезекті несиеге деген сауалды өтемеудің ықтималдығын табыңыз.

Несие бөлімінің бастығына өтелмеген несие туралы хабарлама келді, бірақ хабарламада клиенттің аты дұрыс жазылмаған. Бұл несиені басқа банк қайтармайтынының ықтималдығы қандай?

Ш е ш у і. Өтемеу ықтималдығын толық ықтималдықтың формуласы бойынша іздейміз. Н1 – мемлекеттік органнан, Н2 – банктен, Н3 – жеке тұлғадан түскен сауалы болсын, А – несиені өтемеу ықтималдығы. Сонда



Екінші ықтималдықты Байес формуласыбойынша табамыз.



Осы мысалда келтірілген деректер, мысалы  шартты ықтималдықтар, негізінде қалай анықталады?

Қарастырылған клиент тобындағы несиені өтемеу жиілігіне байланысты. Мысалы, жеке тұлғалар 1000 несие алып оның 200 өтемесе, сәйкес  ықтималдығы 0,2-ге тең болады. Мұндағы 1000 және 200 деген деректер банктің ақпараттық деректер қорынан алынады.

**11.7. Депозит тәуекелі**

Депозитті мерзімінен бұрын қайтарып алуы депозит тәуекелі деп аталады. Депозит тәуекелі банкті активтерін басқаша топтауға мәжбүрлеп, оның әдетті жұмысына кедергі келтіретіні анық, ал бұл болса шығындарға әкеледі. Депозиттің көптеген қайтарылуы банктің банкротқа ұшырауына ықпал етуі мүмкін.

**Мысал 8.** Банкте ұсақ клиенттер көп (мысалы, Сбербанктегіндей) және депозитті қайтарып алу ықтималдықтары бәріне бірдей болсын дейік. Сонда Муавр-Лаплас интегралды формуласы бойынша



мұндағы *n* – клиент саны, *p* – қайтару ықтималдығы, *q=1-p*; *k1,k2* – қайтарылған салымдар санының шекарасы, Ф – Лаплас функциясы. Сонымен, шамамен бірдей және тәуелсіз клиенттер саны көп болса, депозиттер қайтарымын сенімді болжауға болады.

**Сұрақтар мен есептер**

**1.** Келесі пікірлерді қарастырыңыз және білмеушілік немесе кездейсоқтық тәуекелін тудыратынын анықтаңыз:

а) сізде өткен жыл бойынша рубль – доллар бағамының өзгерістері туралы мәліметтер жоқ;

б ) сізде банкіңіздің активтер жағдайы туралы мәліметтер жоқ;

в) сіз үкіметтің соңғы … туралы қаулысы іскерлік операцияға қалай әсер ететінін білмейсіз;

г) сіздің (бұл алдағы 3 айда болатын жағдайларға байланысты) фьючерстік келісім-шарттарыңыз пайдалы бола ма;

д) сіз клиентке несие беру жайлы сұрақтарды шешесіз, сізде ол туралы нақты мәліметтер жоқ, бірақ оның белгілі бір әлеуметтік топқа жататыны белгілі;

е) сізге белгілі бір кәсіпорын топтарының несие қайтару статистикасы белгілі. Осы топқа жататын берілген кәсіпорын үшін несиеның қайтармау тәуекелін қандай себептер тудырады?

ж) автокөлік сақтандыруында машина мен оның иесінің қандай фокторлары маңызды болады және олар білместік пен кездейсоқтықтың қайсысына жатады?

и) дебитордың тұрғын үйінің кепілақысына қарыз берілген. Осының қандай мүмкін болатын салдары болады және олардың пайда болуына не себеп болады ?

л) кассирдың жұмыс өтілі білмеушілікпен және кездейсоқ қателермен қалай байланысты?

**2.** Төрт операциялар үшін компьютердің көмегімен (математикалық күтім) тиімділік және (дисперсиялардың квадрат түбірлері) тәуекелдер есептелген:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Операциялар* | *Математикалық күтім* | *Тәуекел* |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Компьютерлік есеп айырысуларды тексеріңіз. Операцияны тәуекел-тиімділік жазықтығына нүкте ретінде салыңыз және бірінші мен үшінші операциялар үстем болатынына, ал екінші мен төртінші үстем болмайтынына көз жеткізіңіз, демек Парето бойынша ұтымды.

**3.** Операцияның екі әртүрлі ақшалай нәтижелері *а* мен *b*, ал сәйкесінше олардың ықтималдықтары *р* мен 1 *- р* болсын. Операцияның орташа күтілетін тиімділігі мен тәуекелінің *р*-дан тәуелділігін графикте бейнелеңіз.

**4.** Тиімділігі *е* және тәуекелі *r*, *Q*  операциясы мен тиімділігі мен тәуекелі сәйкесінше *е*′ және *r*′ болатын *Q*′ операциялары өзара байланыспаған. Мына *Qf* = *fQ* + (1 – *f*)*Q*′. операцияны қарастырайық. Оның тәуекелін *f* функцисы ретінде табыңыз. Қандай *f*  үшін тәуекел минималды? Операция *Qf* тәуекелінің *f*-тен тәуелділігін шамамен график арқылы өрнектеңіз.

**5.** Операцияның қорытындысы *а*-дан *b-*ға дейін біркелкі таратылған ақшалай табыс болсын, *а < b*. Осы операцияның тәуекелі қандай?

Ж а у а б ы. **, себебі [*а*, *b*] кесіндісінде біркелкі таратылған кездейсоқ шаманың дисперсиясы -қа тең.

**6.** *Q* операциясының табысы кездейсоқ және оның үлестіру қатары келесідей болады :



Операцияның тиімділік және тәуекелін *р*-ның функциясы ретінде табыңыз.  *р*-ның қандай мәнінде тиімділік максималды және осы максималды мән неге тең? Осы сұрақтарға операцияның тәуекелі үшін де жауаптарын табыңыз.

**7.** Тиімділігі мен тәуекелі (орташа квадраттық ауытқудың мағынасында) сәйкесінше (*r*1, *e*1) және (*r*2, *e*2) болатын екі өзара байланыспаған *Q1* және *Q2*  операциялары берілсін. Осы операциялар мен олардың мүмкін болатын барлық *L* сызықтық комбинациясын (шамамен) жазықтықта бейнелеңіз (§ 11.2-ші тұжырымды ескеріңіз). *r*1, *r*2 тәуекелдерінің минималынан кіші болатын *L*  операциясының тәуекелі бар ма? *L* операцияларға (көрcетілген тұжырымды ескеріңіз) арналған Парето жиынын табыңыз. Сонымен бірге дербес жағдайларды қарастарыңыз: а) *r*1 = *r*2 үшін және б) *e*1 = *e*2 үшін.

Бұл есептің шешімі сабақ болады. Есептің шешімін тек қана  *r*1 < *r*2  және *e*1 < *e*2 үшін ғана табамыз (11.1-ші сурет).



11.1-ші сурет

*Qf*  = *fQ* + (1 – *f*)*Q*2 операциясын қарастырайық. Сонда оның тиімділігі

*ef* = *fef* + (1 – *f*)*e*2  және оның тәуекелі  тең болады*.* Аргумент пен функцияның тәуелділігі параметрлік түрде болатын дифференциалдау ережесі бойынша *ef* және  *rf* функцияларынан туынды табайық. Сонда алатынымыз

.

Ізделінді туынды: егер  болса, теріс; егер  болса, туынды болмайды; егер  болса, оң болатыны көрініп тұр.

Ендеше, ізделінді *L* операцияларының жиыны шамамен 11.1-ші суретіндегідей қисықпен бейнеленеді. Дербес жағдайда, Парето жиыны осы қисықтың *SQ*2 бөлігі болады. Сонымен бірге, Q1 операциясы Парето бойынша ұтымды болмай қалатыны қызық.

**8.** Екі өзара байланысты операциялардың кездейсоқ табыстарының үлестірілу кестесі төмендегідей :



Жиынтық операцияның тиімділігін және тәуекелін табу керек.

Ш е ш у і. *Q* операциясының жиынтық табысының үлестіру қатары мынадай:



Демек, жиынтық операцияның тиімділігі 1,6-ға тең, ал жиынтық операциясының тәуекелі 1,5-ке тең болады.

**9.** ШҚТ-ға тиімділігі *e*o болатын тәуекелсіз *Т* операция қол жетерлік болсын деп жориық. Тиімділігі *e* > *e*o және тәуекелі *r* болатын басқа *O* операциясы берілсін. *Sf* = *fO* + (1 – *f*)*T* операциясын қарастырыңыз және оның тәуекелін тиімділігі арқылы өрнектеңіз.

Ш е ш у і. Бұл операцияның тиімділігі *ef* = *fe* + (1 – *f*)*e*o тең, ал *r*-шы тәуекелі *rf* = ⎜*f* ⎜*r* тең (§ 11.2-ші тұжырымды қараңыз). болады және осы өрнекті қойып  аламыз.

Зерттеуді жалғастырайық. 11.2-ші суретте *f⋅O* +(1 – *f*)*T* операциясының тиімділігі мен тәуекелі әртүрлі *f* үшін көрсетілген. Негізінде кез-келген тиімділік пен тәуекелге қол жеткізуге болатынына көңіл аударыңыз.



11.2-ші сурет

Бұдан әрі мысалда нақтылаймыз. *O* операциясы – кейбір *S*  сомасын құлпынайды ерте өсіру үшін тиімділігі 20% және қандайда бір тәуекелмен салынған 3 айға салым болсын (11.2 суреттегі *О* нүктесін қараңыз), ал Т *—*осы соманы 5% пайызбен 3 айға жинақ банкісіне салған операция болсын (11.2-шi суреттегі *Т* нүктесіне қараңыз). Сонда *О*1 операциясы екі амалды береді:

 *О*1 операциясы –  сомасы құлпынайды өсіру үшін салынады,  сомасы банкке салынады;

 *О*2 операциясы – 2*S* сомасы құлпынайды өсіру үшін салынады, ол үшін банктен 5% пайызбен *S* мөлшерінде қарыз алынады;

*О*3 операциясы - құлпынайды өсіретін басқа біреуден 3 айда қайтаруға, оған қоса «құлпынайдан» түскен табысты да беретін уәдемен *S* сомасын қарызға алып, барлық 2*S* соманы банкке 5% пайызымен салады.

 Соңғы операция тиімсіз болуы мүмкін. Иә, оны жүйелі түрде қайталау орынсыз болуы мүмкін. Жарайды, егер ШҚТ алдағы күшті аяздар туралы құпия мәліметті білсе ше?

**10.** 10-шы тараудағы 3-ші есепті қарастырайық. Онда нәтижелері *q*1, … . *qn* болатын *Q* операциялары үшін компоненттері *r*1, … , *rn* , мұндағы *rj* = max{*qi*: *i* = 1, … , *n*} – qj болатын *R* векторы анықталған еді. Осы вектор тәуекелдер векторы деп аталған еді. *Q*  операциясы ықтимал болсын, яғни нәтижелерінде ықтималдық бар болсын.  *Q* операциясының тәуекелі (орташа квадраттық ауытқудың мағынасында – ОКА) *R* векторының ОКА-на тең болатынын дәлелдеңіз.