**ІІ бөлім**

**Стохастикалық қаржыЛЫҚ**

**математиканың негіздері**

9 -тарау. Айқындалмаған жағдайдағы есеп айырысу схемаларының өзгерісі

10-тарау. Айқындалмаған жағдайлардағы қаржылық операцияларды бағалауының классикалық схемасы

11-тарау. Ықтималдықтың қаржылық операциялардың сипаттамалары

12-тарау. Тәуекелдерді азайтудың жалпы әдістері

13-тарау. Активтерге баға белгілеу модельдері

14-тарау. Капиталдың тез өсуі

15-тарау. Опциондар және опциондардың бағаларын белгілеу

16-тарау. Құнды қағаздардың оптималды портфелі

17-тарау. Қаржылық нарықтың жетекші факторының көмегімен ұтымды портфельді құру

18-тарау. Қаржы нарығы және оның модельдері

**ІІ бөлімнің толықтырылуы**

19-тарау. Күтілетін пайдалылық теориясы

20-тарау. ШҚТ және инвестордың тәуекелге көз қарасы

Есеп айырысуға қажеттінің барлығы белгілі болса, онда оны айқындалғандық деп атайды. Айқындалмағандық (айқындалғандықты теріске шығару) бірмәнді емес нәтижелерге алып келеді, яғни ол тәуекел деген сөз. Айқындалмаған жағдайдағы қаржы операцияларының тағы бір сипаттамасы пайда болады − тәуекелдік. Тәуекелге 10-12 тараулар арналған, және де қалған тарауларда да бұл ұғым негізгі ұғымдардың бірі болып есептеледі. 9 тарауда толық емес анықталғандық жағдайында қаржылық есеп айырысулардағы кейбір өзгерістер туралы айтылған. 13 тарауда қаржы нарығындағы баға белгілеудің биномиалды модельдері мен оның кейбір модификациясы қарастырылған. 14 тарауда капиталдың максималды тез өсуі үшін "рулетка" ойын ставкалардың стратегиясы сипатталған. Бүгінгі күндері қаржы нарығындағы өте маңызды роль атқаратын опциондарға – туынды қаржы құралдарына 15-ші тарау арналған. 16-17 тарауларда ұтымды портфельдер теориясы, ал 18 тарауда қаржы нарықтарының кейбір үлгілері қысқаша сипатталған. ІІ бөлімге қосымшада пайдалылықтың теориясы және тәуекелге шешім қабылдаушы ШҚТ-ның (шешім қабылдайтын тұлғаның), яғни инвесторлардың, көз қарасы айтылған.

Айқындалмаған жағдайдағы әрекет етудің ең басты қағидасы (басты қимыл) – тәуекелді кеміту және мүмкін болатын табысты көбейтуге ұмтылу. Кездейсоқтықтардың бәрі бірдей ықтималдықпен өлшенбейді. Айқындалмағандық – кеңірек ұғым. Ойын сүйегінің бетінде қандай цифр шығады деген анықталмағандық пен 15 жылдан кейін Ресей экономикасының жағдайы қалай болады деген айқындалмағандықтардың бір-бірінен айырмашылығы болады. Қысқаша айтқанда, сирек кездесетін жеке кездейсоқ құбылыстар айқындалмағандықпен байланысты, жаппай кездейсоқ құбылыстар міндетті түрде ықтималдық сипаттағы кейбір заңдылықтарға жол береді.

Осы бөлімде оқырмандар ЖОО ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика курсын біледі деп есептеледі.

**9-тарау**

**АЙҚЫНДАЛМАҒАН ЖАҒДАЙДАҒЫ ЕСЕП АЙЫРЫСУ СХЕМАЛАРЫНЫҢ ӨЗГЕРІСІ**

Осы тарауда айтылғанның мағынасын мысалдармен түсіндірейік. Дивидендтер төлеудің үш схемасын қарастырайық:

1. Әр тоқсанның ортасында 100 а.б. мөлшерінде дивидендтер төленеді;
2. Әр тоқсанның ортасында 100 а.б. жуық кез келген мөлшерінде дивидендтер төленеді;
3. Әр тоқсанда кез келген бір күні 100 а.б. мөлшерінде дивидендтер төленеді.

Үш схеманың қайсысы акция иесі үшін қолайлы болады? Бұл тарауда осыған ұқсас сұрақтары талданады.

**9.1. Құбылмалы пайыз мөлшері**

Бірлік аралықта ақшаны қолданған үшін пайыздарды қосып есептеудің үш нұсқасын қарастырайық:

1. Аралықтың соңында і мөлшерімен пайыздар есептеледі;
2. Аралықтың соңында кез келген мөлшерімен, орта есеппен алғанда і пайыз мөлшеріне тең болатындай, пайыздар есептеледі;
3. Пайыздар екі рет есептеледі: бірінші жартысы аралықтың соңына жақындағанда, ал екінші жартысы аралықтың аяқталуынан кейін дәл сондай уақыттан кейін.

Бұл есеп абстрактылы болса да бұдан айқын және қиын емес қорытынды жасауға болады.

Пайыздарды есептеудің бірінші нұсқа – айқындылық жағдайындағы қаржы талдаудың нұсқасы. Сондықтан екінші және үшінші нұсқаларды талдайық. Бірлік ақшалай соманы қарастырумен шектелсек те жеткілікті.

Екінші нұсқа. *f(x)* – кездейсоқ X мөлшерінің үлестірім тығыздығы болсын, сонда есептелетін пайыздық ақша тығыздығы *f(x)* және математикалық күтімі *M[I]=M[X]=i* тең *І(Х) =Х*кездейсоқ шама болады. Басқа сөзбен айтқанда, кездейсоқ мөлшердің айқындалған эквиваленті – *і*.

Үшінші нұсқа.Пайыздық ақшаның бір жартысы *і/2* мөлшерімен 1-ε мезетінде, ал екінші жартысы дәл сол мөлшермен 1+ ε мезетінде есептелсін дейік, ε – оң сан. Бірінші рет есептелген пайыздық ақша  тең, ал екінші рет есептелген ақша  тең болады. Бұл сомаларды 1 – мезетіне келтірейік, ол үшін  көбейту, ал  көбейту керек. Алынған - бұл 1 мезетіндегі пайыздық ақша қосындысының эквиваленті.  болғандықтан пайыздық ақша *і*-ден үлкен болады, яғни есептелетін пайыздық мөлшерінің айқындалған нұсқасы *і*-ден үлкен.

Екінші мен үшінші нұсқаларды қалай елестетуге болады? Бір банктің пайыз беру жағынан дербес филиалдары бар дейік (осындай банктердін бірі Сбербанк болып саналады). Олардың бәрі орта есеппен алған кезде бүкіл банк үшін пайыз мөлшері і-ге тең болатынкездейсоқ пайызды аралықтың соңында есептеген кезде, екінші нұсқа шығады. Бұл нұсқаны кездейсоқ пайыздар деп атайтын боламыз. Ал әрбір филиал бір пайыздық мөлшермен, бірақ есептейтін күні кездейсоқ болған жағдайда үшінші нұсқа шығады. Бұл кездейсоқтық – кездейсоқ уақыт мезетінде (белгілі) пайыздарды есептеу.

Сонымен, кездейсоқ пайыздардың айқындалған эквиваленті (екінші нұсқа) есептелетін пайыздардың кездейсоқ шамасының математикалық күтіміне тең болады. Пайыздардың (уақыт бойынша) кездейсоқ есептелінетін айқындалған эквиваленті (үшінші нұсқа) уақыт мезеті бойынша есептелетін пайыздардың математикалық күтімінен артық болады.

Ұқсас қорытындылар болашақ сомаларды қазіргі мезетке дисконттадың әртүрлі нұсқаларынан да шығады. Пайыз мөлшері і-ге тең бірлік аралыққа алынған қарызды өтеудің үш нұсқасын қарастырайық:

1. Аралықтың соңында *(1+і)* сомасы төленеді – айқындалған нұсқа;
2. Аралықтың соңында орта есеппен алғанда *(1+і)* теңкездейсоқ сома төленеді;
3. Бүкіл сома екі бөлініп төленеді: бір жартысы – аралықтың соңына қарай, ал екінші жартысы аралықтың аяқталуынан кейін дәл сондай уақыттан кейін.

Жоғарыда көрсетілген талдаудан екінші нұсқа бойынша қазіргі мезетке дисконтталған төлемдердің орта шамасы 1-ге тең болып шығады, демек екінші нұсқа айқындалған нұсқаға эквивалентті; үшінші нұсқа бойына төлемдердің орта шамасы 1 артық болып кетеді. Сонда, несие беруші үшін үшінші нұсқа қалаулырақ. Бұл тараудың басындағы жағдай үшін де дұрыс келеді – акция иесі үшін де үшінші нұсқа қолайлы болады.

Мұның бәрі қаржы мамандарына белгілі, басқа сөзбен айтқанда: *мүмкін болса, өз қарызыңды кейінірек төле, ал өзіңе тиісті қарыздарды ертерек жина.*

**9.2 Кездейсоқ төлем ағындары**

Мұндай ағындардың түрлері көп болуы мүмкін:

1. Толығымен айқындалған ағындар – төлем мезеттері мен шамалары толық анықталған;
2. Жартылай айқындалған ағындар – не төлем мезеттері не төлем шамалары толық анықталған болады және т.б.

Екі мысалды қарастырумен шектелеміз.

**Мысал 1.** Келісімшарт бойынша 5 жыл бойы әр тоқсанның аяғында баспа автордың есепшотына кездейсоқ ақшалай соманы жібереді (сатылған кітаптар санына байланысты). Бұл сома 1000-1400 рубль аралығында тең мөлшерде үлестірілген болсын. Осы рентаның қазіргі шамасын қалай табуға болады?

Ш е ш у і. Төлем мезеттері нақты анықталған болғандықтан есепте негізгі төлемдер ағынын олардың математикалық күтімдерінің ағындарына өзгертуге болады, сол кезде анықталған талдаудың қажетті формуласын қолдануға болады. Жіберілетін сома тең мөлшерде үлестірілген болғандықтан, оның математикалық күтімі үлестірген аралықтың ортасына тең, яғни 1200 рубль Оңайлату үшін тоқсандық пайыз мөлшерін *i=3%* деп алайық, сонда қазіргі шама келесіге тең болады

руб.

**Мысал 2.**  параметрлі көрсеткіш заңы бойынша үлестірілген кездейсоқ уақыт аралықтары арқылы бірлік төлемдер бірінен соң бірі төленеді деп алайық. Осындай кездейсоқ төлемдер ағынының қазіргі шамасын (дәлірек, осы шаманың математикалық күтімін) табайық.

Ш е ш у і. Бірінші төлемді қазіргі мезетке дисконттайық. Ол үшін келесі интегралды есептеу керек:



Көрсеткіш заңында  параметрі математикалық күтімнің кері шамасы болатынын ескергенде  аламыз, мұндағы Т – төлемдердің арасындағы орташа уақыт, сонда бірінші төлемнің қазіргі шамасының математикалық күтімі  тең.

Төлемдердің арасындағы уақыт аралықтары бірдей үлестірілген болғандықтан, екінші төлемнің қазіргі шамасының математикалық күтімі , ал үшінші төлемдікі -  тең болады. Осы шамалардың қосындысы ізделінді шаманы береді.  болғандықтан қосындының мүшелері шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелері болады, сонда қосынды  тең.

Ал *T=1* болған кезде  аламыз. Егер ағын кездейсоқ болмаған кезде және төлемдер бірінен соң бірі бірлік уақыт аралығы арқылы төленіп жатқан болса, онда осындай ағынның қазіргі шамасы *1/і* болатын еді.  болғандықтан кездейсоқ рентаның қазіргі шамасы тұрақты рентадан артық. 

Кездейсоқ уақытта төленетін төлем ағындары жиі кездеседі. Мысалы, осындай төлем ағындарына пәтердің ақысын төлеу де жатады, өйткені ешкім пәтер үшін бір уақытта төлей бермейді. Егер 1 мысалда баспа автордың есепшотына сатылған кітаптың әр бір мың данасы үшін ақша жіберіп тұратын болса, бұл кездейсоқ уақыт мезеттеріндегі кездейсоқ емес төлемдер ағыны болатын еді.

Қайтыс болған кісінің туысқандарына төленетін өлім бойынша сақтандыру сомасы да жоғарыда келтірілген ағындардың маңызды мысалдарының бірі. Мұндай төлем ағындарымен актуарлы математика айналысады.

**9.3 Қауыпты инвестициялық процесстер**

4 тараудың соңындағы ескертуде инвестициялық жобалардың сипаттамаларын бағалау үшін болашақ табыстарды қазіргі мезетке дисконттау мөлшері өте маңызды екені айтылған. Егер болашақ төлемдер қаіыпті болса, яғни нақты анықталмаған болса, инвесторлар болашақ табыстардың қазіргі бағасын төмендетеді. Сонымен болашақ табыстардың қазіргі шамаларын бағалау үшін дисконттаудың үлкейтілген мөлшерін қолдану тура келеді. Ең дұрысы жобаларды тәуекелі төмен, орташа және жоғары класстарына бөліп әр топтың дисконттау коэффициенттеріне белгілі қосымшаларды қосып жазу керек. Мысалы, тәуекелі төмен классының мөлшеріне 2%, орташаға - 4% , жоғарыға - 6% қосылады. Қосымша дисконттау коэффициентімен байланысты екені анық. Бұл коэффициент инфляциямен, үкіметке деген сенімге және басқа да факторлармен байланысты. Қаржылық нарықтың кейбір модельдерінде бұл сұрақ өздігінше шешіледі.

Осыдан келесі қорытынды жасауға болады: жобалардың тартымдылығын үлкейту үшін фирма қосымшаның кемуін ойлау керек. Ол үшін ықтималды инвесторлардың сенімін тарту қажет. Сенімді тарту деген дивиденддерді уақытылы төлеу, акционерлердің құқығын сақта және т.б. Әсіресе бұл ұзақ уақыт бойы жұмыс істеуді жоспарлаған фирма үшін маңызды. Мұндай фирма үшін адал болу пайдалы.

**9.4. Айқындалмаған жағдайда ықтималдық операцилардың табыстылығын есептеу**

Айқындалған талдауда қаржылық операцияның табыстылығы d келесі теңдеуден анықталады  немесе , мұндағы *Н, К* – сәйкесінше операцияның басындағы (шығындар мен инвестициялар) және соңындағы (табыстылық пен арттырылған капитал) ақшалай бағалаулары. Жалпы айтқанда, бұл шамалар айқындалмаған болулары мүмкін. Бірақ бастапқы бағалау белгілі болуы тиіс. Соңғы бағалаудың айқындалмағаны екі түрлі болуы мүмкін: оның шамасы толық емес белгілі болып, операцияның аяқталу мезеті нақты белгілі, немесе шамасы толық белгілі, бірақ операция кездейсоқ бір мезетте аяқталу мүмкін. Бірінші жағдайда соңғы бағалаудың орнына оның математикалық күтімін қолданады.. Екінші жағдайдың табыстылығын есептеуді келесі мысал арқылы қарастырайық.

**Мысал 3.** Саудагердің бастапқы капиталы $1000 тең. Осы ақшаға алған тауарды сату нәтижесінде оның капиталының екі есе өсуі, өзгермеуі, немесе екі есе кемуінің ықтималдықтары бірдей. Жоспарланған операцияның күтілетін орташа табыстылығын табу керек.

Ш е ш у і. Капиталдың соңғы бағалауының математикалық күтімі (2000+1000+500)/3=3500/3 тең, сонда күтілетін орташа табыстылық – (3500/3-1000)/1000=500/3000=17%

**Мысал 4.** Кен орнындағы алтын қорлары, сонымен қатар өңдеуге салынған бастапқы инвестициялар да белгілі. Кен орнының қайтарымы бекітілген, сондықтан оның (жылдық пайыздағы) табыстылығы жұмыс істеу уақытына байланысты: неғұрлым ұзақ жұмыс істесе, соғұрлым табыстылығы кемиді.

Операцияның бастапқы бағасы нақты анықталмаған кезде операцияның табыстылығы ықтималдықтары ескерілген операция нұсқалары табыстылықтарының математикалық күтімі ретінде есептелуі мүмкін1.

**Мысал 5.** Ықтималдығы 0,9-ға тең операцияның негізгі нұсқасы $10 000 шығындарды және $3 000 табысты ескереді, оның табыстылығы 0,3-ке тең; ал ықтималдығы 0,1-ге тең операцияның басқа да нұсқасы болуы мүмкін, бұл жағдайда шығындары $20 000, ал табысы $10 000 болады. Операцияның орташа күтілетін табыстылығы қандай?

Ш е ш у і. Табыстылығы  тең болады.

**9.5. Қаржылық көрсеткіштің анықталған эквивалентінің жалпы түсінігі**

*f* - кездейсоқ шама болып, кейбір қаржылық көрсеткіші болсын (пайыз мөлшері, табыстылық, өтелімділік мерзімі және т.б.). Көрсеткіші *f*  қаржылық операция бірнеше рет қайталанды дейік. *f* қаржылық көрсеткіштің анықталған

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

 Операция түсімін есептеудің тағы басқа да тәсілі бар

эквиваленті дегеніміз анықталған қаржылық талдаудағы орта есеппен дәл өзі беретіндей нәтижені көрсететін шама.

Жиі анықталған эквиваленті болып *f* –тің математикалық күтімі табылады.

**Е с к е р т у**. Негізінде құбылмалы пайыздық мөлшерлері, немесе кездейсоқ төлем ағындары бар жағдай жоғарыда айтылғаннан күрделірек. Инвесторлардың көбісі кездейсоқ нәрсені оның математикалық күтіміне ауыстыруға келіспейді, көбірек болғанын талап етеді. Әр анықталмағандылық қауіпті жағдайлармен байланысты болғандықтан, инвесторлар тәуекел операциялардың табыстылығы көбірек болғанды, ал инвестициялық жоба бойынша болашақ табыстарды қазіргі мезетке дисконттаған кезде (болашақ табыстарды кеміте отыра) пайыздық мөлшері үлкен болғанды талап етеді және т.б. Инвесторлардың мұндай талаптарын жүзеге асыру қиын (2 бөлімге толықтыруды қара).

**Сұрақтар мен есептер**

(жетіспейтін мәліметтер оқырманның қарастыруы бойынша)

 1. Бірлік аралықта ақшаны пайдаланудың пайыздық есептеулерінің қарапайым жағдайындағы құбылмалы пайыз мөлшерінің детерминделген эквиваленттіне анықтама беріңіз.

 2. Егер оны екі рет есептеген жағдайда; бірінші жартысы 0,9-шы кезеңде, екінші жартысы 1,1-ші кезеңде есептелгенде пайыз мөлшерінің детерминделген нұсқасын табыңыз.

 3. Егер 0,9-шы кезеңде оның ықтималдығы $\frac{1}{3}$ -ге тең, және 1,1-ші кезеңде оның ықтималдығы $\frac{2}{3}$ -ге тең болса, оның пайыз мөлшердің детерминделген нұсқасын табыңыз.

Ш е ш у і. Пайыз мөлшерінің шамасы *i* –ге тең, ал қосындысы бірлік, онда 1 кезеңіндегі арттырылған соманың математикалық күтімі



тең, яғни детерминделген нұсқасы *i* -ден сәл кіші болады.

 4. Егер пайыз мөлшерін қосып есептеу мезеті [0,9;1,1] уақыт кесіндісінде біркелкі бөлінген болса, онда пайыз мөлшерінің детерминделген нұсқасын табыңыз.

 5. (-1000, 600, 600 ) инвестициялық жобаның пайыз мөлшері 8% болса, оған талдау жасаңыз. Инвестициялар ақталады ма? Сарапшылар жобаны орташа қатерлі деп тауып, келешек дисконттық пайызды 13%-ға дейін үлкейтті. Осы жағдайдағы инвестициялар ақталады ма?

 6. [0, 1] кесіндісінде біркелкі бөлінген кездейсоқ кезеңге 1 төлем келеді. Оның қазіргі шамасының математикалық күтімін табыңыз.

 7. Кездейсоқ рентаның қазіргі шамасының математикалық күтімін табыңыз: 1000 а.б. төлемдер тең ықтималдықпен 1 қазанда немесе 1 желтоқсанда жыл сайын іске асады .

 8. Жылдық төлем кезеңінде үстіміздегі жылында бір қалыпты бөлінген төлемнің қазіргі қездейсоқ рентасының шамасының математикалық күтімін табыңыз.

 9. Акцияның бағасы бүгін күндіз 100 рубльге тең. Тәулік ішінде баға $\frac{1}{3}$ ықтималдықпен 10%-ға өсуі, дәл сондай ықтималдықпен 1,1 есе кемуі, дәл сондай ықтималдықпен 100 рубль болып қалуы мүмкін. Ертеңгісін акцияның бағасын ертеңге және арғы күнге бөліңіз.

 10. Бір уақытта көптеген инвестициялық жобалар ("Клондайктегі алтын безгегі") іске асады. Әрбір жобаға салынған инвестиция $5000-ға тең, ал келешек жылдық табыс келешек жобалар бойынша кездейсоқ – 500 доллардан 3000 долларға дейін біркелкі бөліп берілген. Жобалардың қандай бөлігі 10 жыл ішінде ақталады? (Жылдық пайыз мөлшері 8%.)

 11. Сақтандыру компаниясы жылдың басында жылдық *i*% пайызбен банкке ақша салады. Жылдың кез-келген уақытында компанияға 1 ақша бірлік көлемінде сақтандыру өтемін төлеуге тура келетін сақтандыру жағдайы болуы мүмкін. Жылдың соңындағы компания есебіндегі соманың математикалық күтімін табыңыз.

 12. Бастапқы инвестициялары 0 кезеңінде 1-ге тең, ал келешек табыстардың ағыны уақыт бірлігіндегі тығыздығы 1-ге тең пуассондық бірлік төлем ағыны болатын инвестициялық жобаны талдаңыз. Пайыздық сыйақы *i-*ге тең.

 13. Кез келген уақытта жедел жылдық үлестің салымшысы (бұл Ресейде мүмкін, басқа елдердің көпшілігінде мүмкін емес) өз үлесін талап ете алады деп жориық. Банк бұл ретте жедел үлес 30% орынына 10% жылдық есеппен нақты уақыт аралығы үшін пайыз төлейді. Салымшының орташа жоғалқан пайызы қандай?

Ш е ш у і. Салымды қайтарып алу кезеңі жыл бойына біркелкі бөлінген дейік. Егер үлес *х*-шы кезеңде талап етілсе, онда төленген пайыздар (1 + 0,1)*x*-тең, ал ол (1 + 0,3)*x*-не тең болуы керек еді. Салымды қайтарып алу кезеңі тығыздығы біркелкі бөлінгендігін ескере отырып бұл айырмашылықты интегралдаймыз. Сонда төмендегіні аламыз

,

яғни 9,3% шамасында.

 14. Ойынханада ойыншы ойын сүйегін тастайды және секторларға түскен санға өз фишкасын жылжытады және қай секторға ол түссе сол секторға жазылған ұтысты алады (немесе береді).



9.1-ші сурет

Бастапқы кезеңде оның фишкасы «Кіру» (9.1 суретте «Вход») секторында тұрады, егер оның фишкасы осы секторға түссе, онда ойын аяқталады. Бір ойында сауықхана иесі қанша пайда табады? Бір ойынның ұзақтығы орта есеппен неше лақтырудан тұрады?

Н ұ с қ а у. Z(t) арқылы ойыншының келешекте фишкасы *t* секторында тұрғандағы орташа ұтылысын белгілейік. Онда кез-келген *t* және *t*′ секторлар үшін Z(t) = Z(t′) болатынын оңай байқауға болады. Бұл есептің шешуін табуға мүмкіндік береді. Жалпы, қарастырылып отырған кездейсоқ процесс стохастикалық қаржылық математикада маңызды рөл атқаратын өсімшесі тәуелсіз кездейсоқ процесстерге жатады.