**Тәжірибелік жұмыс № 5.** Рекурсиялық функциялар. Примитивті-рекурсиялық функциялар мен предикаттар. Жартылай- рекурсиялық функциялар. Жалпырекурсиялық функциялар. Черч тезисі. Лямбда-есептеу. Рекурсивті функциялардың комбинаторлық анықталуы.

**БАҚЫЛАУ СҰРАҚТАРЫ**

1. Рекурсиялық функциялар деген не?
2. Алгоритмдер теориясында рекурсиялық функциялардың маңыздылығы неде?
3. Рекурсиялық функциялардың қандай түрлері бар?
4. Примитивті-рекурсиялық функциялар деген не?
5. Примитивті-рекурсиялық предикаттар деген не?
6. Жартылай- рекурсиялық функциялар немен сипатталады?.
7. Жалпырекурсиялық функциялар деген не?
8. Эрбран-Гёдель рекурсиялық функциялардың формалды жүйелеріне не жатады?
9. Рекурсиялық функцияларға қатысты Черч тезисі не жайлы айтады?
10. Лямбда-есептеу деген не? Қайда қолданылады?
11. Рекурсивті функциялардың комбинаторлық анықталуы деген не?

 **Мысал 1.**Суперпозиция оперциясын қолданудағы нәтижелігін табыңыз, егер j(x,y)=x+y және

 (а) f1(u,v,z)=u2vz, f2(u,v,z)=2uvz; (б) f1(x,y,z)=xyz, f2(x,y)=xy3; (в) f1(u,v,z)=u2v2z, f2(u,v,t)=uvt2.

 *Шешім.*

**(а)** y(u,v,z)=***Sub***(j;f1,f2)=***Sub***23(j;f1,f2)=j(f1(u,v,z),f2(u,v,z))==j(u2vz,2uvz)=u2vz+2uvz.

**(б)** орнату операциясы анықталмаған. Яғни,f2(x,y)=I13(x,y,z)×I23(x,y,z)ï =F2(x,y,z),

Орындау үшін:

y(x,y,z)=***Sub***(j;f1,F2)=***Sub***23(j;f1,F2)=j(f1(x,y,z),F2(x,y,z))==j(xyz,I13(x,y,z))3×I23(x,y,z)3) =xyz+I13(x,y,z)3×I23(x,y,z))3
**(в)** y(u,v,z,t)=u2v2z+uvt2 функциясына орнату операциясының нәтижелігін есептеу қажет емес f1 и f2  фун­кциясына j. Сондықтан:

f1(u,v,z)=ïI14(u,v,z,t) 2×I24(u,v,z,t)×2I34(u,v,z,t)=F1(u,v,z,t);
f2(u,v,t)=I14(u,v,z,t)×I24(u,v,z,t)×I44(u,v,z,t)2 =F2(u,v,z,t),орындауға болады.

Жазуды оңайлату үшін аргументтерді көрсетпеуге болады, яғни алдыңғы кезекте төмендегідей көрсетуімізге болады:

f1(u,v,z)=(I14)×I24×2I34=F1(u,v,z,t);
f2(u,v,t)=I14×I24×(I44)2 =F2(u,v,z,t).

 Орнату операциясын қабылдаудағы нәтижесін табамыз:

y(u,v,z,t)=***Sub***(j;F1,F2)=***Sub***23(j;F1,F2)==j(F1(u,v,z,t),

F2(u,v,z,t))==j(I14×I24×2, I14×I24×I44ï ï=ïI14×I24×2 +I14×I24×I44
**Мысал 2.**

(а) примитивті рекурсия операциясында алынған арифметикалық функцияны табамыз , егер*:* g(x)=I11(x), h(x,y,z)=I33(x,y,z)+1, f=***Rec***1(g,h);

(б) *көбейту* f(2,5).

 Шешім.

(а) оңай аламыз, яғни g(x)=I11(x),h(x,y,z)=I33(x,y,z)+1,

f=***Rec***1(g,h), сондықтан примитивті рекурсияның анықталған операциясы бойынша:



 Сонда: f(x,0)=x, f(x,1)=f(x,0)+1=x+1,f(x,2)=f(x,1)+1=x+2.

Егер  f(x,y)=x+y кез-келген  yÎN. Математикалық индукция әдісімен дәлелдейміз. Сонда  f(x,y)=x+y кездейсоқ  y үшін . Сонда

f(x,y+1)=I33(x,y,f(x,y))+1=f(x,y)+1=x+y+1=x+(y+1) шығады.

 Бұл жағдайда, фун­кция x+y  примитивті рекурсия операциясының көмегімен алынады, сонда бұл функциядан I11(x) и I33(x,y,f(x,y))+1 (біз бұнда байқаймыз, I33(x,y,f(x,y)) фун­кциясын S(I33)) түрінде жазуымызға болады.

(б) f(2,5) есептейміз. Яғни

 f(2,5)=f(2,4+1)=f(2,4)+1,
f(2,4)=f(2,3+1)=f(2,3)+1,
f(2,3)=f(2,2+1)=f(2,2)+1,
f(2,2)=f(2,1+1)=f(2,1)+1,

f(2,1)=f(2,0+1)=f(2,0)+1,

бірақ  f(2,0)=2, сондықтан f(2,5)=7.

**ТАПСЫРМАЛАР.**

 **1.** ([Лав­ров,Максимова,1995,с.130,№14;Матросов,1989,с.102])

cni (1£i£n),болсын cn(cn1(x),...,cnn(x))=x.

(а) 1£i£n.үшін cni(cn(x1,...,xn))=xi теңдікті дәлелдеңіз

(б) cn мен cniфун­кциялары   при­ми­тив­ті- ре­кур­сив­ті екенін дәлелдеңіз .

**3.** **.** [Лав­ров,Максимова,2001,с.143,№6] Кез келген ақырлы натурал сандар жиыны при­ми­тив­ті- ре­кур­сив­ті екенін дәлелдеңіз.

**4.** [Лав­ров,Максимова,1995,с.144,№10] Егер A мен B ре­кур­сивті болсаы, онда AÇB, AÈB, N\A жиындары да ре­кур­сив­ті екенін дәлелдеңіз.

**5.** [Лав­ров,Максимова,1995,с.144,№11] Егер A мен B ре­кур­сивті санамалы болса, онда AÇB, AÈB жиындары да ре­кур­сив­ті санамалы екенін дәлелдеңіз.

**6.**  [Лав­ров,Максимова,2001,с.144,№16] MÌN*–*бос емес жиын, M ре­кур­сив­нті санамалы болады, егер M={a(x)|xÎN} болатын a(x) при­ми­тив­ті-ре­кур­сивті фун­кция  бар болса.

**7**\***.** [Лав­ров,Максимова,2001,с.143,№5] Ре­кур­сив­і санамалы болмайтын жиындар бар екенін дәлелдеңіз.

**8.** ([Лав­ров,Максимова,1995,c.127,№3]) Қарапайымдар көмегі арқылы қандай функциялар алынады:

(а) Орнату операциясының тек қана бір қабылдауында;

(б) Орнату операциясында ақырғы санда қабылдауда.

**9.**  [Мат­ро­сов,1989,c.22-23,№3] При­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті функцияның сипаталуын жазыңыз, {y1,y2,y3,y4,+,×}салыстырмалы жиынтық:

 (а) f(x,y)=y1(x).y2(x,y)+y3(x,y)+y4(x); (б)f(x,y), қанағаттанарлық шарт:



**10.**  Суперпозиция операциясын қолданудағы нәтижесін табыңыз, егер: j(x,y)=x+y және

 (а) f1(u,v,z)=u2vz, f2(u,v,z)=2uvz; (б) f1(x,y,z)=xyz, f2(x,y)=xy3; (в) f1(u,v,z)=u2v2z, f2(u,v,t)=uvt2.

 **11.** Орнату операциясын қолданудағы нәтижесін табыңыз, егер: j(x,y,z)=xy+z және

 (а) f1(u,v,z)=uvz2, f2(u,v,z)=2vzu, f3(u,v,z)=u+v+z; (б) f1(x,y,z)=xy3z, f2(x,y)=xy, f3(x,z)=x+z2; (в) f1(u,v,z)=uv2z, f2(u,v,t)=u2+vt, f3(v,z,t)=3v2+2z+5t.

 **12.** Примитивті операциясын қолданудағы нәтижесін табыңыз, егер:

 (а) g(u)=2u, h(u,y,z)=uyz;

(б) g(u,v)=u2v,h(u,v,y,z)=2uvz;

(в) g(u,v,t)=uv+2t,h(u,v,t,y,z)=u+yv+t2z.

 **13.** [Лав­ров,Максимова,1995,c.127,№6] Төмендегі функциядан g және  h  схема көмегімен қандай функция алынады?

при­ми­тив­ті ре­кур­сия: (а) g(x)=x,h(x,y,z)=zx;

 (б)g(x)=x, h(x,y,z)=xz?

**14.** ([Лав­ров,Максимова,1995,c.126-127,№2])Дәлелдеңіз, егер фун­кция fn(x1,...,xn) при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті болса, онда келесі функция при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті:

 (а) f1(x1,x2,...,xn)=f(x2,x1,...,xn) ( *ар­гу­мен­ттерді ауыстыру*); (б) f2(x1,x2,...,xn)=f(x2,,...xn,x1) (*цик­лдік аргументтерді ауыстыру*); (в) f3(x1,...,xn,xn+1)=f(x1,...,xn) (Жалған аргументтiң енгiзілуi); (г) f4(x1,...,xn-1)=f(x1,x1,...,xn-1) (*теңестіру ар­гу­мен­ттері*).

**15.** [Лав­ров,Максимова,1995,c.127,№5] Келесі функцияның примитивті – рекурсивті екенін дәлелдеңіз:

 (а) f(x)=x+n; (д) f(x,y)=xy(здесь 00=1); (б)f(x)=n; (е) f(x)=x!(здесь 0!=1); (в)f(x,y)=x+y; (ж) f(x)=1+x+x2+...+xn. (г)f(x,y)=x×y;

**16.** [Мат­ро­сов,1989,c.19,№1] Келесі функцияның примитивті – рекурсивті екенін дәлелдеңіз:

(а) f(x)=x+4; (е) f(x)=xx; (б) f(x)=2×x+1; (ж) f(x,y)=(x+y)x.y; (в) f(x,y)=2×x+3×y; (з)f(x,y)=(k×x+y)n.x.y; (г) f(x,y)=k×x+n×y; (и) f(x)=3x.x+1;  (д) f(x)=2x; (к) f(x)=x×x+3×x+2.

 **17.** (По [Гуд­стейн,1970,c.109]) Дәлелдеңіз, егер j(x) примитивті-рекурсивті болса, және



Онда f(x) фун­кциясы при­ми­тив­ті-ре­кур­сивті болады.

**18.** [Лав­ров,Максимова,1995,c.127,№7; Мат­ро­сов,1989,c.19,№3] Келесі функцияның примитивті – рекурсивті екенін дәлелдеңіз:



**19.** [Глад­кий,1998,с.332] Келесі функцияның примитивті – рекурсивті екенін дәлелдеңіз:

 (а) [log2x]; (б) minn(x1,...,xn) – санынан төмен x1,...,xn (n=3,4,...); (в)maxn(x1,...,xn) - санынан жоғары x1,...,xn (n=3,4,...).

**20.** [Лав­ров,Максимова,1995,c.129,№12] Келесі функцияның примитивті – рекурсивті екенін дәлелдеңіз:

(а) [x/y] – бөлінген x - y([x/0]=x); (б) *rest*(x,y) – қалдық x - y (*rest*(x,0)=x); (в)t(x) – бөлінетін сан x (t(0)=0); (г)s(x) – бөлінетін санның қосындысы x (s(0)=0); (д) *lh*(x) – жай бөлінетін сан  x (*lh*(0)=0);  (е)p(x) – жай сан, x; (ж) k(x,y) – ең кіші ортақ еселік x және  y (k(x,0)=0 и k(0,y)=0);

*Дәлелдеу*. [Пе­тер,1954,с.48-50].

**21.** [Мат­ро­сов,1989,c.19,№4] Келесі функцияның примитивті – рекурсивті екенін дәлелдеңіз: (а)f(x)=|3×x-5|; (в) f(x,y)=2x×(2×y+1).1; (б)f(x)=|6x×x+2×x-8|; (г) f(x)=5×x!+8.

**22.** [Мат­ро­сов,1989,c.24,№1] Келесі функцияның примитивті – рекурсивті екенін дәлелдеңіз:

(б) g(x,y,z)=j(x,z)+y(y,x), фун­кция j және y - при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті;

(в) g(x)=5.2xx;                    y(y,4)

(г) g(x,y,z)=j(x,6,z) , фун­кция j және y - при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті.

**23.** [Лав­ров,Максимова,1995,c.131,№19] Дәлелдеңіз, фун­кция Фи­бо­нач­чи реттік сан бойынша қайта саналады, при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті.



**24.** [Лав­ров,Максимова,1995,c.131,№20] фун­кция f және g келесідегідей анықталған:



Дәлелдеңіз, егер фун­кция h1 және h2 при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті, онда фун­кция f және g при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті болады.

**25.** ([Лав­ров,Максимова,1995,c.131,№21]) f1n+1,...,fkn+1 фун­кциясы бірлескен рекурсия көмегімен анықталған:



Барлығы үшін 1£i£k. Дәлелдеңіз, егер фун­кция g1,...,gk,h1,...,hk при­ми­тив­ті-ре­кур­сивті, онда фун­кция f1,...,fk при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті.

**26.** [Лав­ров,Максимова,1995,c.133,№33] дәлелдеңіз:

  (а) ***i***(ax+b)=b×(ax-1)/(a-1) егер a>1; (д)***i***ïx+1+(Ö4x+1)|=x2+x;

 (б) ***i***ï1+[x/2]ï=*sg*(x);               (е)***i***ïx+1+2Öx|=x2.

 (в) ***i***ïx+1+[(x+1)/2]-[x/2]ï=2x.1;

 (г) ***i***ï*sg*-(x)+2xï=2x-1.*sg*-(x);

**27.** [Мат­ро­сов,1989,c.20,№7] При­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті функциясының сипатталуын табыңыз:

 а) f(x)=x+3; (г) f(x)=2×*sg*(x); (ж)f(x,y)=2×x.y;

(б) f(x)=3×x; (д) f(x,y)=x×y+6; (з)f(x)=|x×x-4|;

(в) f(x)=7×x+2; (е) f(x)=*sg*-(x.3);

 (и) j(x,y), қанағаттандырарлық шарт:



**28.** При­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті сипаталуын құрыңыз, нақты сандар көбейтудегі функция үшін.

**29.** F примитивті-рекурсивті функциясын екі аргумент арқылы белгілейміз, төмендегі при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті сипаттауда:

(7,2,(4,3,(1,1),2),(2,1)).

F функциясын жүйелі теңсіздік түрінде сипаттап көрсетіңіз:



**30.** [Лав­ров,Максимова,1995,c.127-128,№8] Келесі теңсіздікті дәлелдеңіз:  (а) x.y=(x+1).(y+1); (в) x.(y+z)=(x.y).z; (б) x+(y.x)=y+(x.y); (г) (x.y).z=(x.z).y.

**31.** Салыстырмалы примитивті рекурсивті қасиетін дәлелдеңіз: (а) егер f - при­ми­тивті-ре­кур­сивті фун­кция қатысты функциялардың жиынтығы y және  yÌH, то f - при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кция қатысты h; (б) егер f - при­ми­тив­ті-ре­кур­сивті фун­кция салыстырмалы y, ал y1 алынады  y-тан қандай-да бір при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кция, онда f - при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кция салыстырмалы y1; (в) егер f - при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кция салыстырмалы y, ал әрбір фун­кция  y - при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кция салыстырмалы жиынтық h, онда f - при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кция салыстырмалы жиынтық  h; (г) егер f - при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кция салыстырмалы y, ал әрбір фун­кция  y - при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кция, онда f - при­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кция.

**32.** [Мат­ро­сов,1989,c.22,№1] При­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кциясын жазыңыз: Сипатталған жиынтық  {+,×,.}:

(а) f1(x,y,z)=x×y+z+3; (б) f2(x,y)=4×x×x+x×y+5; (в) f3(x,y,z)=x+z;

(г) f4(x,y), қанағаттанарлық шарт:



(д) f5(x,y), қанағаттанарлық шарт:



(е) f6(x,y), қанағаттанарлық шарт:



**33.** [Мат­ро­сов,1989,c.22,№2] При­ми­тив­ті-ре­кур­сив­ті фун­кциясын жазыңыз: сипатталған жиынтық {y1,y2,y3}:

 (а) j1(x,y)=y1(y2(x,y3(y,2y))); (б)j2(x,y,z)=y3(x,y2(y,y1(x)),2);

(в)j3(x1,x2,x3,x4)=y1(y3(x1,x2,x3),y1(x4,x1)); (г) j4(x1,x2,x3)=y1(3,y1(x3,y2(0)));

(д) j5(x,y)=y3(x,y,y); (е)j6(x,y,z)=y2(z,y3(0,y1(x),y2(x,5)));

(ж) j7(x,y,z)=y2(z,y3(z,y2(x,x),y1(0))).

***Жұмыстың орындалуына әдістемелік нұсқау.*** Тақырыпқа қатысты әдебиеттерді және дәріс материалын, сәйкес программалық пакеттерді пайдаланыңыз.