

Практическая работа 15. Построение уравнения тренда.

Цель работы: Освоение методики построения уравнения тренда.

Задание:

- 1 Изучить и освоить теоретическую основу построения уравнения тренда.
- 2 Решить представленные в работе примеры.
- 3 Рассчитать прогнозные значения поведения зависимостей по уравнению тренда.

1 КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Прямолинейный тренд и его свойства.

Самым простым типом линии тренда является прямая линия первой степени, описываемая линейным (т.е. первой степени) уравнением тренда: $\hat{y}_i = a + bt_i$, где \hat{y}_i - выровненные уровни тренда для лет с номером i (уровни, лишенные колебаний), a - свободный член уравнения, численно равный среднему выровненному уровню для момента или периода времени, принятого за начало отсчета ($t = 0$), b - средняя величина изменения уровней ряда за единицу изменения времени, t_i - номера моментов или периодов времени, к которым относятся уровни временного ряда (год, квартал, месяц, дата).

Среднее изменение уровней ряда за единицу времени – это главный параметр и константа прямолинейного тренда. Следовательно, этот тип тренда подходит для отображения тенденции примерно равномерных изменений уровней: равных в среднем абсолютных приростов или абсолютных сокращений уровней за равные промежутки времени.

Практика показывает, что такой характер динамики встречается достаточно часто. Причина близких к равномерному абсолютных изменений уровней ряда состоит в следующем: многие явления, как, например, урожайность сельскохозяйственных культур, численность населения региона, города, сумма дохода населения, среднее потребление какого-либо продовольственного товара, зависят от большого числа различных факторов. Одни из них влияют в сторону ускоренного роста изучаемого явления, другие - в сторону замедленного роста, третьи - в направлении сокращения уровней и т.д.

Влияние разнонаправленных и разноускоренных (замедленных) сил факторов взаимно усредняется, частично взаимно погашается, а равнодействующая их влияний приобретает характер, близкий к равномерной тенденции. Итак, равномерная тенденция динамики (или застоя) - это результат сложения влияния большого количества факторов на изменение изучаемого показателя.

Графическое изображение прямолинейного тренда - прямая линия в системе прямоугольных координат с линейным (арифметическим) масштабом на обеих осях.

1.2 Основные свойства тренда в форме прямой линии таковы.

Перечислим свойства прямолинейного уравнения тренда:

- равные изменения за равные промежутки времени;
- если средний абсолютный прирост - положительная величина, то относительные приросты или темпы прироста постепенно уменьшаются;
- если среднее абсолютное изменение - отрицательная величина, то относительные изменения или темпы сокращения постепенно увеличиваются по абсолютной величине снижения к предыдущему уровню;
- если тенденция к сокращению уровней, а изучаемая величина является по определению положительной, то среднее изменение b не может быть больше среднего уровня a ;

- при линейном тренде ускорение, т.е. разность абсолютных изменений за последовательные периоды, равно нулю.

Свойства линейного тренда иллюстрирует данные таблицы 7.1.

Уравнение тренда: $\hat{y}_t = 100 + 20t_i$. Показатели динамики при наличии тенденции сокращения уровней приведены в таблице 7.2.

Таблица 7.1.

Показатели динамики при линейном тренде к увеличению уровней $\hat{y}_t = 100 + 20t_i$.

Номер периода t_i	Уровень \hat{y}_t	Абсолютное изменение к предыдущему периоду	Темпы (цепные), %	Ускорение
1	120	+20	120,0	-
2	140	+20	116,7	0
3	160	+20	114,3	0
4	180	+20	112,5	0
5	200	+20	111,1	0
6	220	+20	110,0	0

Таблица 7.2.

Показатели динамики при линейном тренде сокращения уровней: $\hat{y}_t = 100 - 20t_i$.

Номер периода t_i	Уровень \hat{y}_t	Абсолютное изменение к предыдущему периоду	Темп к предыдущему периоду, %	Ускорение
1	180	-20	90,0	-
2	160	-20	88,9	0
3	140	-20	87,5	0
4	120	-20	85,7	0
5	100	-20	83,3	0
6	80	-20	80,0	0

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Пример 2.1. Рассчитать параметры уравнения тренда.

Решение: Линейное уравнение тренда имеет вид $y = b + at$. Находим параметры уравнения методом наименьших квадратов. Система уравнений МНК: $a_0n + a_1 \sum t = \sum y$ · $12a_0 + 78a_1 = 567.8$. В итоге: $a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y \cdot t$ · $78a_0 + 650a_1 = 4602.3$.

Таблица 7.3.

Параметры уравнения тренда

t	y	t^2	y^2	$t \cdot y$	$y(t)$	$(y - y_{cp})^2$	$(y - y(t))^2$	$(t - t_{cp})^2$	$(y - y(t)) / y$
1	17.4	1	302.76	17.4	12.29	895.2	26.11	30.25	0.29
2	26.9	4		53.8					
3	23	9		69					
4	23.7	16		94.8					
5	27.2	25		136.0					
6	34.5	36		207.0					
7	50.7	49		354.9					
8	61.4	64		491.2					
9	69.3	81		623.7					
10	94.4	100		944.0					
11	61.1	121		672.1					

12	78.2	144		938.4					
78	567.8	650		4602.3					

Определить:

- 1 Используя данные первых 3 граф таблицы 7.3 заполнить остальные графы таблицы.
- 2 Построить систему 2 уравнений с 2 неизвестными (a_0 и a_1).
- 3 Вычислить значения a_0 и a_1 .
- 4 Определить уравнение тренда.
- 5 Оценить качество уравнения тренда с помощью ошибки аппроксимации.
- 6 Рассчитать:
 - 6.1 средние значения: $t_{cp}, y_{cp}, (t \cdot y)_{cp}$;
 - 6.2 дисперсию $D(t), D(y)$;
 - 6.3 среднеквадратическое отклонение (СКО);
 - 6.4 коэффициент эластичности;
 - 6.5 коэффициент детерминации;
- 7 Провести анализ точности определения оценок параметров уравнения тренда.

Пример 1.2. Изучить динамику статистического развития численности населения Республики Коми (таблица 7.4).

Определить:

- 1) С помощью цепных, базисных, средних показателей динамики оценить изменение численности. По результатам оценки сформулировать выводы.
- 2) С помощью метода аналитического выравнивания (по прямой и параболе, определив коэффициенты с помощью МНК) выявить основную тенденцию в развитии явления (численность населения Республики Коми).
- 3) Оценить качество полученных моделей с помощью ошибок и коэффициентов аппроксимации.
- 4) Определить коэффициенты линейного и параболического трендов через построение их диаграмм.
- 5) Представить точечный и интервальный прогнозы численности на Республики Коми на 2010 год. По полученным результатам сформулировать выводы.

Таблица 7.4.

Динамика статистического развития численности населения Республики Коми

1990	1996	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
1249	1133	1043	1030	1016	1005	996	985	975	968

Решение:

Решение найдем методом аналитического выравнивания. Линейное уравнение тренда будет иметь вид: $y = a + bt$. Находим параметры уравнения методом наименьших квадратов используя способ отсчета времени от условного начала.

Система уравнений МНК для линейного тренда имеет вид:

$$a_0n + a_1 \sum t = \sum y; a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y t.$$

Таблица 7.5.

Параметры уравнения тренда

t	y	t^2	y^2	$t \cdot y$
-9	1249	81	1560001	-11241
-7	1133	49	1283689	-7931
-5	1043	25	1087849	-5215
-3	1030	9	1060900	-3090
-1	1016	1	1032256	-1016
1	1005	1	1010025	1005
3	996	9	992016	2988
5	985	25	970225	4925

7	975	49	950625	6825
9	968	81	937024	8712
0	10400	330	10884610	-4038

Анализ данных с таблицы 7.5 показывает, что для таких данных уравнения примут вид: $10a_0 + 0a_1 = 10400$; $0a_0 + 330a_1 = -4038$. Из первого уравнения выражаем a_0 и подставим во второе уравнение. Получаем $a_0 = -12.236$, $a_1 = 1040$.

Определим уравнение тренда: $y = -12.236 t + 1040$. Оценим качество уравнения тренда с помощью ошибки абсолютной аппроксимации: $\bar{A} = (\sum |y_t - y_i| \div y_i) \div n \times 100\%$.

Ошибка аппроксимации в пределах 5 - 7% свидетельствует о хорошем подборе уравнения тренда к исходным данным: $\bar{A} = (0,32 \div 10) \times 100\% = 3,19\%$.

Поскольку ошибка меньше 7%, то данное уравнение можно использовать в качестве тренда: выравнивание по параболе.

Теперь уравнение тренда будет иметь вид: $y = a t^2 + b t + c$. Находим параметры уравнения методом наименьших квадратов. Система уравнений МНК:

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 &= \sum y; \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 &= \sum y \cdot t; \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 &= \sum y \cdot t^2. \end{aligned}$$

Таблица 7.6.

Параметры уравнения тренда

t	y	t^2	y^2	$t \cdot y$	t^3	t^4	$t^2 \cdot y$
-9	1249	81	1560001	-11241	-729	6561	101169
-7	1133	49	1283689	-7931	-343	2401	55517
-5	1043	25	1087849	-5215	-125	625	26075
-3	1030	9	1060900	-3090	-27	81	9270
-1	1016	1	1032256	-1016	-1	1	1016
1	1005	1	1010025	1005	1	1	1005
3	996	9	992016	2988	27	81	8964
5	985	25	970225	4925	125	625	24625
7	975	49	950625	6825	343	2401	47775
9	968	81	937024	8712	729	6561	78408
0	10400	330	10884610	-4038	0	19338	353824

Для нашего случая система уравнений имеет вид:

$$10a_0 + 0a_1 + 330a_2 = 10400;$$

$$0a_0 + 330a_1 + 0a_2 = -4038;$$

$$330a_0 + 0a_1 + 19338a_2 = 353824;$$

Получаем: $a_0 = 1.258$, $a_1 = -12.236$, $a_2 = 998.5$.

Уравнение тренда: $y = 1.258 t^2 - 12.236 t + 998.5$.

Ошибка аппроксимации для параболического уравнения тренда: $\bar{A} = (0,19 \div 10) \times 100\% = 1,89\%$. Поскольку ошибка меньше 7%, то данное уравнение можно использовать в качестве тренда. Минимальная ошибка аппроксимации при выравнивании по параболе. К тому же коэффициент детерминации R^2 выше, чем при линейной. Следовательно, для прогнозирования необходимо использовать уравнение по параболе.

Интервальный прогноз:

- определим среднеквадратическую ошибку прогнозируемого показателя:

$$S_y = \sqrt{(\sum |y_i - \bar{y}|^2 \div (n - m))} = \sqrt{5839,08 \div (10 - 1)} = 25,47.$$

Здесь параметр $m = 1$ показывает количество влияющих факторов в уравнении тренда:

$Uy = y_{n+L} \pm K$, где $K = t_\alpha S_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}}$; L - период упреждения; y_{n+L} - точечный прогноз по модели на $(n+L)$ -й момент времени; n - количество наблюдений во временном ряду; S_y - стандартная ошибка прогнозируемого показателя; $T_{\text{табл}}$ - табличное значение критерия Стьюдента для уровня значимости α и числа степеней свободы, равного $n - 2$.

По таблице Стьюдента находим $T_{\text{табл}} = T_{\text{табл}}(n - m - 1; \alpha / 2) = (8; 0.025) = 2.306$.

Точечный прогноз: $t = 10$, $y(10) = 1.26 \cdot 10^2 - 12.24 \cdot 10 + 998.5 = 1001.89$ тыс. чел.

$$k_1 = 2,306 \times 25,47 \sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{3(10+2 \times 1 - 1)^2}{10(10^2 - 1)}} = 71,13.$$

$1001.89 - 71.13 = 930.76$; $1001.89 + 71.13 = 1073.02$.

Интервальный прогноз: $t = 9 + 1 = 10 / (930.76; 1073.02)$.

3 ОТЧЕТ ДОЛЖЕН СОДЕРЖАТЬ

3.1 Наименование и цель работы.

3.2 Условие задания (полный текст заданий).

3.3 Программные средства, используемые при выполнении работы.

3.4 Описание выполненной работы согласно требованиям преподавателя:

- формулировка решения о наилучшем использовании трудовых ресурсов;

- формулировка решения о максимальном доходе работника;

- формулировка решения о рационе питания работника.

3.5 Сформулированные выводы и составленное заключение о проведении работы.

3.6 Список использованной литературы.

4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

4.1 Напишите уравнение тренда и поясните его назначение.

4.2 Расшифруйте назначение параметров a , b и t в уравнении тренда.

4.3 Какие параметры прямолинейного тренда являются главным и константой?

4.4 Какова причина близких к равномерному абсолютных изменений уровней ряда?

4.5 Перечислите основные свойства тренда в форме прямой линии.

4.6 Изучите данные с таблицы 7.1 и поясните, как получены значения 120,0; 116,7; 114,3; 112,5; 111,1; 110,0?

4.7 Изучите данные с таблицы 7.2 и поясните, как получены значения 90,0; 88,9; 87,5; 85,7; 83,3; 80,0?