Практическая работа 10
Целочисленное программирование.

Цель работы: Освоить методы решения задач на целочисленное программирование.

Задание:
1 Изучить теорию освоения целочисленного программирования (ЦП).
2 Освоить методику решения задачи ЦП методом Гомори.
3 Составить Порядок учета дополнительного ограничения в ЦП.
4 Составить алгоритм реализации метода Гомори при решении задач ЦП.

1 КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Теория применения целочисленного программирования (ЦП).

Значительная часть экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования (ЛП), требует решения проведением вычислений целочисленными значениями. К ним относятся задачи, у которых переменные величины означают количество единиц неделимой продукции. Например, распределение производственных заданий между предприятиями, раскрой материалов и производство неделимой продукции. Если единица составляет малую часть всего объема производства, то оптимальное решение находят обычным симплекс-методом, округляя его до целых единиц, исходя из смысла задачи.

1.2 Постановка задачи ЦП и методы решения.

Задача целочисленного программирования формулируется так же, как и задача ЛП. Но включается дополнительное требование: значения переменных, составляющих оптимальное решение, должны быть целыми не отрицательными числами.

В таком случае требуется найти минимальное значение линейной функции типа:

$F = \sum c_{ij}\, x_j \rightarrow min\ (max)\ j$ € J при условиях: $\sum a_{ij}\, x_j = b_i$, $x_j \geq 0$ и целые $i = 1, m$, $j = 1, n$.

Если $n = n$, то задачу называют полностью целочисленной; если $n_i < n$, то частично целочисленной. Предположим, что задача ЛП имеет многогранных решений.

Если наложить требование целочисленности, то допустимое множество решений выродится в систему точек и уже не будет выпуклым. Если добавить новые ограничения, связывающие внешние целочисленные точки, а затем получить выпуклого многогранника, ограниченную осями координат, то получим новую задачу со следующими свойствами:

1) новый многогранник решений содержит все целые точки первоначального многогранника решений, и любая его угловая точка является целой;

2) так как линейная функция достигает оптимума в угловой точке многогранника решений, то построением такого многогранника и обеспечивается целочисленность оптимального решения.

Для решения задачи используется метод Гомори, основанный на симплекс-методе. Симплексным методом находится оптимальный план без учета целочисленности. Если оптимальный план целочисленный, то вычисления заканчивают. Если оптимальный план содержит хотя бы одну дробную компоненту Xj, то накладывают дополнительное ограничение целочисленности и вычисления продолжают до получения нового оптимального плана.

1.3 Составление дополнительного ограничения.

Пусть оптимальный план вида $X = (\boldsymbol{x_i, x_2, ..., x_j, ..., x_m, ..., x_n})$ получен на базисе A_i, A_2, ..., A_i, ..., A_m, тогда последняя симплексная таблица имеет следующий вид, показанный в таблице 5.1.

Таблица 5.1.

Вид симплексной таблицы

X_1	1	0	...	0	0	$X_{1,\ m+1}$	X_1, j	...	$X_{1,\ n}$
X_2	0	1	...	0	0	$X_{2,\ m+1}$	X_2, j	...	$X_{2,\ n}$
X_i	0	0	...	1	0	$x_{i,\ m+1}$	x_i, j	...	$X_{i,\ n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	0	0	...	0	1	$x_{m,\ m+1}$	x_m, j	...	$X_{m,\ n}$

Предположим, что Xj – дробное. Тогда некоторые x_{ij} будут также дробными. Обозначим через $[x;]$ и $[xy]$ целые части чисел $x>$ и xy, т.е. наибольшие целые числа, не превосходящие чисел Xi и xy. Тогда величины дробных частей q_i и q_{ij} можно выражать как: $Xi - [xy] = q_i$, $Xj - [Xy] = q_{ij},$ где q_i и q_{ij} – не отрицательные числа.

Например: [7 / 3] = 2; [-7 / 3] = -3; 7 / 3 - [7 / 3] = 7 / 3 – 2 = 1 / 3; [-7 / 3] - [-7 / 3] = [-7 / 3] + 3 = 2 / 3.

Так как по условию Xj - неотрицательные целые числа, то и разность $[(qii\ Xi + qi_2\ X_2 + ... + qin\ X_n) - qi] > 0$ также является целым неотрицательным числом.

Преобразуя это неравенство в уравнение, вычитая из его левой части целую не отрицательную дополнительную переменную $x_n + 1$, умножим уравнение на -1, добавим к последней симплексной таблице и, применяя двойственный симплексный метод, находим новый план. Если в оптимальном плане несколько дробных чисел Xj, то дополнительное ограничение составляют для max q_i. Это ускоряет процесс получения оптимального целочисленного решения.

Таким образом, решение задачи целочисленного программирования трудоемко. Поэтому по возможности лучше не накладывать ограничений целочисленности переменных. В ряде случаев задачу целочисленного программирования решают следующим образом:

1) как непрерывную задачу линейного программирования;
2) округляют переменные;
3) проверяют допустимость округленного решения;
4) если решение допустимое, то оно принимается как целочисленное.

При необходимости точного решения применяют специальные методы, где учитывается, что множество решений любой целочисленной задачи конечно.

1.4 Пример решения задачи методом Гомори.

Пусть $L(x) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow max$ при ограничениях: $2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3$; $x_1 + 3x_2 + x_4 = 10$, где x_1, x_2 – целые числа.

Решение этой задачи симплекс-методом представлено в таблице 5.2.

Таблица 5.2.

Решение задачи симплекс методом

c_j	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
0	X_3	2	1	1	0	19/3
0	X_4	1	3	0	1	10
	Δ_j	-2	-4	0	0	0
0	X_3	5/3	0	1	-1/3	3
4	X_2	1/3	1	0	1/3	10/3
	Δ_j	-2/3	0	0	4/3	40/3
2	X_1	1	0	3/5	-1/5	9/5
4	X_2	0	1	-1/5	2/5	41/15
	Δ_j	0	0	2/5	6/5	218/15

Таким образом, получим решение: $X_1 = 9/5$, $X_2 = 41/15$, $L(x) = 218/15$. Найдем дробные части чисел 9/5 и 41/15: 9/5 = 9/5 - 1 = 4/5; 41/15 = 41/15-2=11/15. Учитывая дробные части чисел 3/5 и -1/5 (1 строка 3-го шага) напишем: 3/5 = 3/5 - 0 = 3/5; -1/5 = -1/5 +1 = 4/5. Теперь составим дополнительные ограничения целочисленности для 1-й строки 3-го шага (таблица 5.3): $3/5x_3 + 4/5x_4 \geq 4/5$ или $3/5x_3 + 4/5x_4 - x_5 = 4/5$.

Таблица 5.3.

Дополнительные ограничения целочисленности
для 1-й строки 3-го шага

c_j	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	X_5	b_i
	X_1	1	0		3\5	0	9/5
	X_2	0	1	-1/5	2/5	0	41/15
		0	0	3/5	4/5	-1	4/5
2	X_1	1	0	0	-1	1	1
4	X_2	0	1	0	2/3	-1/3	3
0	X_3	0	0	1	4/3	-5/3	4/3
	Δ_j	0	0	0	2/3	2/3	14

Теперь получили целочисленное решение: $X_1 = 1$; $X_2 = 3$; $L(x) = 14$.

Пример 1. Решить графически целочисленную задачу ЛП вида: $f(x) = x_1 - 20x_2 \rightarrow min$, $-x_1 + 10x_2 \leq 40$; $4x_1 + 2x_2 \leq 29$; $X_j \geq 0$, x_j € Z, $j = 1, 2$.

Решение. На плоскости (x_1, x_2) построим допустимое множество X рассматриваемой задачи ЛП без требования целочисленности (на рисунке 5.1 – это многоугольник OACB). Отметим точки множества X с целочисленными координатами. Совокупность этих точек и есть допустимое множество X полностью целочисленной задачи.

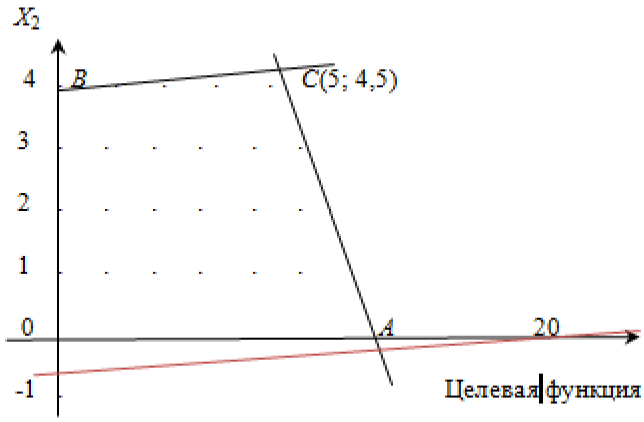

Рисунок 5.1. Допустимое множество X рассматриваемой задачи ЛП
без требования целочисленности (многоугольник OACB)

Перемещая линию уровня целевой функции $f(x)$ в направлении c - col (-1; 20) убывания $f(x)$, находим крайнее положение этой линии, в котором она еще имеет непустое пересечение с множеством X. В этом положении линия уровня проходит через точку B(0; 4). Поэтому решение задачи $x = col$ (0; 4), $f = min\, f(x) = -80$.

Как видно из рисунка 5.1, точкой минимума функции $f(x)$ в этой задаче без требования целочисленности будет точка C координатами (5; 4.5). Значит $x^* = col$ (5; 4.5), $f^* = min\, f(x) = -85$. Отсюда следует, что точкой минимума целевой функции на допустимом множестве X целочисленной задачи не обязательно является ближайшая к решению x^* обычной (нецелочисленной) задачи точка множества Xс целочисленными координатами.

Рассмотрим преимущества метода Гомори для решения полностью целочисленной задачи ЛП типа (1) и (2) с произвольным числом переменных.

Метод Гомори состоит в последовательном отсечении от допустимого множества X нецелочисленной задачи (1) частей, не содержащих точек с целыми координатами. Эти отсечения производятся включением в задачу дополнительных ограничений на переменные x. Опишем алгоритм Гомори, использующий симплекс-метод:

Шаг 1. Симплекс-методом находим решение x^* задачи (1) без учета требования целочисленности (2). Если для x^* условие (2) выполняется, то задача решена. В противном случае среди чисел β_i, первого столбца симплекс-таблицы, определяющей решение x, есть такие, что $\{\beta_i\} > 0$. Это вытекает из того, что всякое действительное целое число a можно представить в виде $a = [a] + \{a\}$, где $[a]$ - целая часть числа a (наибольшее целое число, не превосходящее a), $\{a\} = a - [a]$ - его дробная положительная часть.

Шаг 2. Среди нецелых элементов β_i, выбираем произвольный элемент β, например, с максимальной дробной частью $\{\beta_i\}$. По r-ой строке симплекс-таблицы составляем дополнительное ограничение вида $\sum \{\alpha_{rj}\}x_j$. Здесь, как и выше, для определенности полагаем, что свободные переменные x_j имеют номера $m + 1, ..., n$).

С помощью вспомогательной переменной $x_{n+1} \geq 0$ это ограничение представим в виде равенства $x_{n+1} - \sum \{\alpha\} = - \{\beta_r\}$ и вводим в симплекс-таблицу дополнительной строкой вида: $X_{n+1}\beta_{n+1} |\alpha_{n+1, m+1} \dots \alpha_{n+1, n}|$, где $\alpha_{n+1, j} = -\{\alpha_{rj}\}$, $j = m + 1, \dots, n$; $\beta_{n+1} = -\{\beta_t\} < 0$.

Так как $\beta_{n+1} = -\{\beta_t\} < 0$, то после дополнения строкой (3) симплекс-таблица перестает соответствовать допустимому базисному решению задачи ЛП, которую она описывает.

Шаг 3. Для перехода к допустимому базисному решению производится следующая операция:

а) строка с отрицательным свободным членом β_κ считается разрешающей (на первом шаге, очевидно, $k = n + 1$);

б) если все коэффициенты $a_{kj} > 0$, то задача не имеет решения; в противном случае номер разрешающего столбца находится из условия p_t / $|a_{ke}| = min$ p_j / $|a_{kj}|$ Здесь p_j - элементы последней строки симплекс-таблицы;

в) совершается преобразование симплекс-таблицы с опорным элементом a_{kj}. Если в новой таблице по-прежнему есть хотя бы один отрицательный свободный член, то описанная процедура повторяется, начиная с операции а), необходимое число раз. Если все элементы P, вновь полученной симплекс-таблицы неотрицательны, то допустимое базисное решение получено.

Отметим, что выбор опорного элемента a_{kj} гарантирует не отрицательность коэффициентов p_j новой симплекс-таблицы. Поэтому найденное допустимое базисное решение является и оптимальным.

Шаг 4. Если найденное в шаге 3 решение задачи ЛП удовлетворяет условию целочисленности, то вычисления завершаются. Если нет, то продолжаются переходом к шагу 2 описания алгоритма.

Приведенный алгоритм позволяет найти решение полностью целочисленной задачи ЛП или установить отсутствие решений за конечное число итераций.

Пример 2. Повторно решить задачу примера 1 методом Гомори.

Решение. Вводим дополнительные переменные $x_3 > 0$, $x_4 > 0$, и запишем эту задачу в канонической форме: $f(x) = x_1 - 20x_2 \rightarrow min$.

$-x_1 + 10x_2 + x_3 = 40$; $4x_1 + 2x_2 + x_4 = 29$.

$X_j > 0$, $x \in Z$, $j = 1, 4$.

Заметим, что так как все коэффициенты ограничений-равенств целые, то целочисленность исходных переменных x_1, x_2 влечет целочисленность и дополнительных переменных x_3, x_4. Поэтому сформулированную выше задачу можно рассматривать как полностью целочисленную и применить для ее решения метод Гомори.

Одна из угловых точек этой нецелочисленной задачи: $x^0 = col$ (0; 0; 40; 29). Запишем укороченную симплекс-таблицу для этой точки (5.4).

Таблица 5.4.

Укороченная симплекс-таблица
для точки (5.4) в задаче примера 2

Базис		X_1	X_2
X_3	40	-1	[10]
X_4	29	4	2
f	0	1	-20

Решение рассматриваемой нецелочисленной задачи находится за 2 итерации симплекс-метода (таблицы 5.5 и 5.6).

Это решение $x^* = col$ 5; 9/2; 0; 0; $f^* = -85$ не удовлетворяет условию целочисленное, поэтому дополняем его строкой (3).

Для перехода к допустимому базисному решению находим разрешающий элемент по описанному выше Правилу и преобразуем симплекс-таблицу (таблица 5.8).

Таблица 5.5.

Первая итерация симплекс-метода

		X_1	X_3
X_2	4	-1/10	1/10
X_4	21	42/10	-2/10
f	80	-1	2

Таблица 5.6.

Вторая итерация симплекс-метода

		X_4	X_3
X_2	9/2	1/42	4/42
X_1	5	10/42	-2/42
f	85	10/42	82/42

Таблица 5.7.

Дополнение таблицы 5.6 строкой (3)

		X_4	X_3
X_2	9/2	1/42	4/42
X_1	5	10/42	-2/42
X_5	-1/2	-1/42	-4/42
	85	10/42	82/42

Таблица 5.8.

Преобразование симплекс-таблицы
для перехода к допустимому базисному решению

		X_5	X_3
X_2	4	1	0
X_1	0	10-	-1
X_4	21	-42	4
f	80	10	1

Последняя симплекс-таблица не только соответствует допустимому базисному решению, но и дает решение рассматриваемой задачи: $x = col$ (0; 4); $f^* = -80$.

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Согласно представленной в первом разделе работы методике решить следующую задачу ЦП: $5x_1 + 2x_2 \leq 18$; $2x_1 + 3x_2 \leq 23$; $F = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow max$.

3 ОТЧЕТ ДОЛЖЕН СОДЕРЖАТЬ

3.1 Наименование и цель работы.
3.2 Условие задания (полный текст заданий).
3.3 Программные средства, используемые при выполнении работы.
3.4 Описание выполненной работы согласно требованиям преподавателя:
- формулировка решения о наилучшем использовании трудовых ресурсов;
- формулировка решения о максимальном доходе работника;
- формулировка решения о рационе питания работника.

3.5 Сформулированные выводы и составленное заключение о проведении работы.
3.6 Список использованной литературы.

4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

4.1 Какие задачи относятся к задачам ЛП, требующим целочисленного решения?
4.2 Как формулируется задача целочисленного программирования?
4.3 Какие свойства имеет новая задача ЦП при введении условия целочисленности?
4.4 Каков порядок решения задачи ЦП методом Гомори?
4.5 В чем состоит сущность метода Гомори?
4.6 Поясните суть алгоритма метода Гомори и опишите его по шагам.