Практическая работа 9
Транспортные задачи по критерию стоимости продукции.

Цель работы: Освоить методику решения транспортной задачи при минимальной издержке предприятия и навыки применения метода «минимального потенциала».

Задание:
1 Изучить теоретическую часть выполняемой работы.
2 Выполнить полностью раздел Порядок выполнения работы предоставляя вариант решения примера 3.1.
3 Составить отчет по выполненной работе и организовать его публичную защиту на занятии.

1 КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Многие прикладные модели в экономике сводятся к задачам линейного программирования (ЛП). Практически все задачи линейного программирования можно решить, используя ту или иную модификацию симплексного метода. Однако существуют более эффективные вычислительные процедуры решения некоторых типов задач линейного программирования, основанные на специфике ограничений этих задач.

Рассмотрим так называемую *транспортную задачу (ТЗ) по критерию стоимости,* которую можно сформулировать следующим образом:

В m пунктах отправления A_1, A_2, ..., A_m, которые в дальнейшем будем называть поставщиками, сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим a_i $(i = 1, 2, ..., m)$. Данный продукт потребляется в n пунктах B_1, B_2, ..., $B_{,,}$, которые будем называть потребителями.

Объем потребления обозначим ***как bj*** $(j = 1, 2, ..., n)$. Известны расходы на перевозку единицы продукта из пункта Ai, в пункт Bj, которые равны c_{ij} и приведены в матрице транспортных расходов как $C = (c_{ij})$.

Требуется составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, т.е. план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов Aj в пункты Bj в соответствии с потребностью и общая величина транспортных издержек будет минимальной.

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта Ai в пункт Bj, через x_{ij}. Совокупность всех переменных x_{ij} для краткости обозначим X, тогда целевая функция задачи будет иметь вид:

$$f(X) = \sum\sum c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

а ограничения выглядят следующим образом:

$$\sum x_{ij} = b_j, j = 1, n. \quad (4.2)$$
$$\sum x_{ij} = a_i, i = 1, m. \quad (4.3)$$

Условие (4.2) означает полное удовлетворение спроса во всех пунктах потребления. Условие (4.3) определяет полный вывоз продукции от всех поставщиков. Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (4.1 является *условие баланса вида:*

$$\sum a_{ij} = \sum b_j . \quad (4.4.)$$

Транспортная задача, в которой имеет место равенство (4.4), называется *закрытой* и может быть решена, как задача линейного программирования с помощью симплексного метода. Однако благодаря особенностям переменных задачи и системы ограничений разработаны специальные, менее громоздкие методы ее решения.

Наиболее применяемым методом является *метод потенциалов,* при котором каждой i-й строке (i-му поставщику) устанавливается потенциал u_h который можно интерпретировать как цену продукта в пункте поставщика, а каждому столбцу j (j'-му потребителю) устанавливается потенциал v_j. Этот потенциал можно принять условно за цену, продукта в пункте потребителя. В простейшем случае цена продукта в пункте потребителя равна его цене в пункте поставщика плюс транспортные расходы на его доставку, т.е.

$$v_j = u_i + c_{ij}. \tag{4.5}$$

Алгоритм метода потенциалов для закрытой транспортной задачи детально описан в ряде учебных пособий [2-4].

Первым этапом этого алгоритма является составление начального распределения (начального плана перевозок). Для реализации этого начального этапа имеется в свою очередь ряд методов: северо-западного угла, наименьших стоимостей, аппроксимаций Фогеля и др.

Вторым этапом служат построение системы потенциалов и проверка начального плана на оптимальность; в случае его не оптимальности переходят к *третьему этапу,* содержание которого заключается в реализации так называемых циклов перераспределения (корректировка плана прикрепления потребителей к поставщикам). После чего переходят опять ко второму этапу.

Совокупность процедур третьего и второго этапов образует одну итерацию. Эти итерации повторяются, пока план перевозок не окажется оптимальным по критерию (4.1).

Если баланс (4.4) не выполняется, то ограничения (4.2) или (4.3) имеют вид неравенств типа «меньше или равно».

Транспортная задача в таком случае называется *открытой.* Для решения открытой транспортной задачи методом потенциалов ее сводят к закрытой задаче путем ввода или фиктивного потребителя, если в неравенства превращаются условия (4.3), или фиктивного поставщика - в случае превращения в неравенства ограничений (4.2).

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Пример 2.1. В четыре магазина доставляются товары из трех пунктов хранения. В первом пункте имеется 400, во втором - 700, в третьем - 1200 тонн товара.

Необходимо доставить в магазины товар в таком количестве: в первый- 700, во второй - 200, в третий - 600, в четвертый - 800 тонн. Стоимость перевозки между пунктами хранения и магазинами приведено в таблице 4.1.

Таблиц 4.1.

Стоимость перевозки между пунктами хранения и магазинами

Пункты хранения	Магазины			
	1	2	3	4
1	18	12	13	7
2	17	10	11	13
3	15	11	10	9

Требуется: Составить такой план перевозки товара, который обеспечит наименьшую стоимость перевозок в тенге.

Решение: Задача является закрытой, т. е. $\sum Ai = \sum Bj$: (400 + 700 + 1200) = (700 + 200 + 600 + 800) = 2300.

Обозначим через Xij количество товара, перевозимого из i-го пункта хранения в j-й пункт потребления (магазин). Исходные данные задачи представлены в таблице 4.2. Здесь строки: пункты хранения, а столбцы: магазины.

Таблица 4.2.

Исходные данные для примера 2.1

Пункт хранения	1	2	3	4	Запасы
1	18 X_{11}	12 X_{12}	13 X_{13}	7 X_{14}	400
2	17 X_{21}	10 X_{22}	11 X_{23}	13 X_{24}	700
3	15 X_{31}	11 X_{32}	10 X_{33}	9 X_{34}	1200
Спрос	700	200	600	800	2300

Представим этапы решения ТЗ методом потенциалов:

1 нахождение первого опорного плана;

2 проверка полученного плана на оптимальность;

3 последовательное улучшение плана до оптимального уровня.

Получение оптимального плана методом сев/зап угла представлено в таблице 4.3.

Таблица 4.3.

Получение оптимального плана методом сев/зап угла

Пункт хранения	1 V_1	2 V_2	3 V_3	4 V_4	Запасы
1 U_1	18 400	12	13	7	400
2 U_2	17 300	10 200	11 200	13	700
3 U_3	15	11	10 400	9 800	1200
Спрос	700	200	600	800	2300

Общая стоимость перевозок составит: F = 400 · 18 + 300 · 17 + 200 · 10 + 200 · 11 + 400 · 10 +800 · 9 = 7200 + 5100 + 2000 + 2200 + 4000 + 7200 = 27700.

Для того, чтобы план был оптимальным необходимо выполнение следующих условий:

а) для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть = стоимости единицы перевозки стоящей в этой клетке: $Ui + Vj = Cij$;

б) для каждой не занятой клетки должно выполняться условие: $Ui + Vj \leq Cij$.

Если хотя бы в одной незанятой клетке это условие не выполняется, то план является неоптимальным и его нужно улучшать.

Расчет потенциалов для занятых клеток: $U_1+V_1 = 18$;

$U_2 + V_1 = 17$; $U_2 + V_2 = 10$; $U_2 + V_3 = 11$; $U_3 + V_3 = 10$; $U_3 + V_4 = 9$.

Полагаем, что $U_1 = 0$ тогда:

$U_1 + V_1 = 18$; $0 + V_1 = 18$; $V_1 = 18$;

$U_2 + V_1 = 17$; $U_2 + 18 = 17$; $U_2 = 17 – 18 = -1$;

$U_2 + V_2 = 10$; $-1 + V_2 = 10$; $V_2 = 10 + 1 = 11$;

$U_2 + V_3 = 11$; $-1 + V_3 = 11$; $V_3 = 11 + 1 = 12$;

$U_3 + V_3 = 10$; $U_3 + 12 = 10$; $U_3 = 10 – 12 = -2$;

$U_3 + V_4 = 9$; $-2 + V_4 = 9$; $V_4 = 9 + 2 = 11$;

Для незанятых клеток должно выполняться условие $Ui + Vj \leq Cij$. Проверяем:

$U_1 + V_2 \leq 12$ / $0 + 11 \leq 12$; $11 \leq 12$ – условие выполняется;

$U_1 + V_3 \leq 13$ / $0 + 12 \leq 13$; $12 \leq 13$ - условие выполняется;

$U_1 + V_4 \leq 7$ / $0 + 11 \leq 7$; $11 \leq 7$ - условие не выполняется;

$U_2 + V_4 \leq 13$; $-1 + 11 \leq 134$; $10 \leq 13$ - условие выполняется;

$U_3 + V_1 \leq 15$; $-2 + 18 \leq 15$; $16 \leq 15$ – не выполняется;

$U_3 + V_2 \leq 11$; $-2 + 11 \leq 11$; $9 \leq 11$ - выполняется.

План не оптимален. Для улучшения плана среди всех невыполненных условий выбираем клетку с наибольшей разницей:

$U_1 + V_4 \leq 7$ / $0 + 11 \leq 7$; $11 \leq 7$ разность: 11 – 7 = 4;

$U_3 + V_1 \leq 15$; $-2 + 18 \leq 15$; $16 \leq 15$ разность: 16 – 15 = 1.

Максимальная разность в клетке 1 - 4.

Строим замкнутый контур (таблица 4.3). Одна вершина контура должна лежать в этой клетке (1 - 4), остальные - только в занятых клетках.(1 - 1), (2 - 2), (2 - 3), (3 - 3), (3 - 4).

Число вершин контура всегда должно быть четное. В выбранной клетке ставится знак (+), в остальных вершинах контура знаки чередуются.

Таблица 4.4.

Расчеты по построению замкнутого контура

Пункт хранения	1 V_1	2 V_2	3 V_3	4 V_4	Запасы
1 U_1	(-) 18 200	12	13	(+) 7 +200	400
2 U_2	(+) 17 500	10 200	(-) 11	13	700
3 U_3	+ 15	11	(+) 10 600	(-) 9 600	1200
Спрос	700	200	600	800	2300

В клетках с отрицательными вершинами выбирается наименьшее значение объема перевозок. В данном случае это будет 200 в клетке (2 - 3). В клетках с отрицательными вершинами объем перевозок уменьшаем на эту величину: (1 - 1) = 400 – 200 = 200; (2 – 3) = 200 – 200 = 0; (3 - 4) = 800 – 200 = 600.

В клетках со знаком (+) объем перевозок увеличиваем на 200:

(2 - 1) = 300 + 200 = 500; (3 - 3) = 400 + 200 = 600; (1 - 4) = 0 + 200 = 200.

Полученные данные записываем в таблицу 4.4. Общая сумма перевозки составит:

$(200 \cdot 18) + (200 \cdot 7) + (500 \cdot 17) + (200 \cdot 10) + (600 \cdot 10) + (600 \cdot 9) =$

= 3600 + 1400 + 8500 + 2000 + 6000 + 5400 = 26900 тенге. Или на 800 тенге (27700 – 26900 = 800) меньше чем в первом опорном плане, полученным методом сев/зап. угла.

Проверка на оптимальность полученного плана:

1 Для занятых клеток составим уравнения потенциалов:

$U_1 + V_1 = 18$; $U_1 + V_4 = 7$; $U_2 + V_1 = 17$; $U_2 + V_2 = 10$; $U_3 + V_3 = 10$; $U_3 + V_4 = 9$.

Полагаем $U_1 = 0$; Тогда $V_1 = 18$; $V_4 = 7$; $U_2 = -1$; $V_2 = 11$; $U_3 = 2$; $V_3 = 8$.

2 Для незанятых клеток проверяем условие (б):

$U_1 + V_2 \leq 12$, $0 + 11 \leq 12$ – выполняется;

$U_1 + V_3 \leq 13$, $0 + 8 \leq 13$ – выполняется;

$U_2 + V_3 \leq 11$, $-1 + 8 \leq 11$ – выполняется;

$U_2 + V_4 \leq 13$, $-1 + 7 \leq 13$ – выполняется;

$U_3 + V_1 \leq 15$, $2 + 18 \leq 15$ - не выполняется;

$U_3 + V_2 \leq 11$, $2 + 11 \leq 11$ - не выполняется.

План не оптимален. Для улучшения среди клеток, в которых не выполняется условие (б) выбирают наибольшее по абсолютному значению. В данном случае это клетка (3 - 1) / 20 – 15 = 5.

Строим контур в таблице 4.4: одна вершина со знаком (=) лежит в этой клетке (3 - 1).

Общая сумма затрат на перевозку составит: $400 \cdot 7 + 500 \cdot 17 + 200 \cdot 10 + 200 \cdot 15 + 600 \cdot 10 + 400 \cdot 9$ = 2800 + 8500 + 2000 + 3000 + 6000 + 3600 = 25900 тенге.

Уменьшение составило 26900 – 25900 = 1000 тенге. Проверяем на оптимальность. Для занятых клеток уравнения потенциалов:

$U_1 + V_4 = 7$; $U_2 + V_1 = 17$; $U_2 + V_2 = 10$; $U_3 + V_1 = 15$; $U_3 + V_3 = 10$; $U_3 + V_4 = 9$.

Полагаем $U_1 = 0$, Тогда: $V_4 = 7$; $U_3 = 2$; $V_1 = 13$; $U_2 = 44$ $V_2 = 6$; $V_3 = 8$.

Для незанятых клеток проверяем условие (б):

$U_1 + V_1 \leq 18$, $0 + 13 \leq 18$ – выполняется;

$U_1 + V_2 \leq 12$, $0 + 6 \leq 12$ – выполняется;

$U_1 + V_3 \leq 13$, $0 + 8 \leq 13$ – выполняется;

$U_2 + V_3 \leq 11$, $4 + 8 \leq 11$ - не выполняется;

$U_2 + V_4 \leq 13$, $4 + 7 \leq 13$ – выполняется;

$U_3 + V_2 \leq 11$, $2 + 6 \leq 11$ – выполняется.

Условие не выполняется в клетке (2 - 3). Строим контур. В таблице 4.5 отрицательные вершины контура расположены в клетках (2 - 1) и (3 - 3). Их значения соответственно 500 и 600 из этих двух значений выбираем наименьшее (500).

Таблица 4.5.

Построение контура

Пункт хранения	1 V_1	2 V_2	3 V_3	4 V_4	Запасы
1 U_1	(-) 18	12	13	(+) 7 400	400
2 U_2	(+) 17 500	10 200	(-) 11	13	700
3 U_3	+ 15 200	11	(+) 10 600	(-) 9 400	1200
Спрос	700	200	600	800	2300

Таблица 4.6.

Завершающие вычисления для построения контура

Пункт хранения	1 V_1	2 V_2	3 V_3	4 V_4	Запасы
1 U_1	(-) 18	12	13	(+) 7 400	400
2 U_2	(-) 17	10 200	(+) 11 500	13	700
3 U_3	+ 15 700	11	(-) 10 100	(-) 9 400	1200
Спрос	700	200	600	800	2300

Общая сумма затрат: $F = 400 \cdot 7 + 200 \cdot 10 + 500 \cdot 11 + 700 \cdot 15 + 100 \cdot 10 + 400 \cdot 9 = 2800 + 2000 + 5500 + 10500 + 1000 + 3600 = 25400$ или на 500 тенге меньше предыдущего плана (25900 - 25400).

Пример 2.2. Методом потенциалов решить следующую ТЗ:

Количество поставщиков: $A_1 = 30$, $A_2 = 70$, $A_3 = 50$; $\sum a_i = 150$.

Количество потребителей: $B_1 = 10$, $B_2 = 40$, $B_3 = 20$, $B_4 = 60$, $B_5 = 20$; $\sum b_j = 150$.

Стоимость перевозки из пункта А в пункт В представлена в таблице 4.7.

Таблица 4.7.

Сведения о стоимости перевозки продукции между пунктами *A* и *B*

a_i b_j	10	40	20	60	20
30	2	7	3	6	2
70	9	4	5	7	3
50	5	7	6	2	4

3. ОТЧЕТ ДОЛЖЕН СОДЕРЖАТЬ

3.1 Наименование и цель работы.

3.2 Условие задания (полный текст заданий).

3.3 Программные средства, используемые при выполнении работы.

3.4 Основную часть работы (описание самой работы), выполненную согласно требованиям преподавателя:

- формулировка решения о наилучшем использовании трудовых ресурсов;
- формулировка решения о максимальном доходе работника;
- формулировка решения о рационе питания работника.

3.5 Сформулированные выводы и составленное заключение о проведении работы.
3.6 Список использованной литературы.

4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

4.1 Сформулируйте транспортную задачу по критерию стоимости.
4.2 Что является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи?
4.3 Что такое закрытая транспортная задача?
4.4 В чем состоит сущность метода потенциалов?
4.5 Расскажите выполнение 1 этапа решения ТЗ методом потенциалов.
4.6 Поясните выполнения 2 этапа решения ТЗ.
4.7 Какие вычисления производятся на 3 этапе решения ТЗ?
4.8 В каком случае ТЗ является «открытой»?
4.9 Какие ставятся требования для открытого решения ТЗ методом потенциалов?