13 - ЛЕКЦИЯ

Условия разрешимости одной нелинейной системы разностных уравнений

Рассмотрим следующую нелинейную систему

$$Ly = -\Delta^{(2)}y + \widetilde{R}(y)\Delta_{-}y = f \qquad (3.5.1)$$

Здесь $\widetilde{R} = diag\{r_i(y), i \in Z\}$ - диагональная матрица, он зависит от искомого элемента $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, а $\Delta^{(2)}y = \{\Delta^{(2)}y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta_{-}y = \{\Delta_{-}y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$. Мы будем считать, что $f = \{f_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2$.

Определение 3.5.1 Элемент $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2$ называется решением системы (3.5.1), если найдется последовательность $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ такая, что, для каждого $\psi \in \widetilde{l}$ имеют место соотношения

$$\left\|\psi\left(y^{(n)} - y\right)\right\|_2 \to 0, \ \left\|\psi\left(l_0 y^{(n)} - f\right)\right\|_2 \to 0 \ (n \to \infty).$$

Теорема 3.5.1 Если $r_j(y)$ ($j \in Z$) является непрерывной по y и удовлетворяет условию

$$r_j(y) \geq 1 + j^2, \qquad (3.5.2)$$

то для любого $f \in l_2$ система уравнений (3.5.32) имеет решение y и для y имеет место соотношение

$$\left\|-\Delta^{(2)}y\right\|_2 + \left\|\widetilde{R}(y)\Delta_{-}y\right\|_2 + \|y\|_2 < \infty.$$

Доказательство. Пусть A - некоторое положительное число, а $S_A = \{z \in l_2 : \|z\|_2 \leq A\}$. Берем произвольный элемент $v = \{v_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ множества S_A и рассмотрим следующее линейное уравнение

$$L_v y = -\Delta^{(2)}y_j + r_j(v)\Delta_{-}y_j = f_j \ \ (j \in Z). \qquad (3.5.3)$$

Основываясь на наших предположениях, легко проверить, что $r_j(v)$ удовлетворяет всем условиям доказанной выше теоремы 3.3.2. Следовательно для любого $f \in l_2$ система (3.5.3) имеет единственное решение y и для y справедлива оценка

$$\left\|-\Delta^{(2)}y\right\|_2 + \left\|\widetilde{R}(v)\Delta_{-}y\right\|_2 + \|y\|_2 \leq C\|f\|_2. \qquad (3.5.4)$$

Зафиксируем элемент $f \in l_2$ и рассмотрим оператор $P : S_A \to l_2$, действующий по формуле $P(v) = L_v^{-1} f$. Если полагать $A = \frac{C}{2}\|f\|_2$, то в силу неравенства (3.5.4) получим $\|P(v)\| \leq A$

$\forall v \in S_A$. Так P отображает замкнутый шар S_A из l_2 в себя. Из непрерывности матрицы $\tilde{R}(v)$ по v вытекает непрерывность отображения P. Из неравенства (3.5.4) получаем, что $P(v)$ отображает множество S_A в подмножество разностного пространства Соболева W с нормой

$$\|y\|_W = \left\|-\Delta^{(2)}y\right\|_2 + \left\|\tilde{R}(v)\Delta_- y\right\|_2 + \|y\|_2 .$$

В силу теоремы 3.4.2, при выполнении условия (3.5.2) P является компактным оператором в l_2.

Таким образом, оператор P удовлетворяет всем условиям известной теоремы Шаудера. Поэтому в шаре S_A оператор P имеет по крайней мере одну неподвижную точку $\tilde{y}$: $P(\tilde{y}) = \tilde{y}$. По предположению $\tilde{y} = L_{\tilde{y}}^{-1} f$, или

$$L_{\tilde{y}}\tilde{y} = -\Delta^{(2)}\tilde{y} + \tilde{R}(\tilde{y})\Delta_-\tilde{y} = f ,$$

Легко показать, что $\tilde{y}$ - решение системы (3.5.1) по определению 3.5.1. С другой стороны $\tilde{y} \in W$, следовательно для $\tilde{y}$ выполняется соотношение

$$\left\|-\Delta^{(2)}\tilde{y}\right\|_2 + \left\|\tilde{R}(\tilde{y})\Delta_-\tilde{y}\right\|_2 + \|\tilde{y}\|_2 < \infty .$$

Теорема доказана.