12 - ЛЕКЦИЯ

Спектральные свойства резольвенты вырожденной разностной системы

Имеет место утверждение.

Теорема 3.4.1 Пусть для матрицы R выполнены (3.3.2)-(3.3.4) и следующие условия:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\sum_{j=n}^{+\infty}\tilde{r}_{j,j}^{-2}\right)=0\,, \tag{3.4.1}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left((1-k)\cdot\sum_{j=-\infty}^{k}\tilde{r}_{j,j}^{-2}\right)=0 \tag{3.4.2}$$

Тогда оператор l^{-1} компактен в пространстве l_2.

Доказательство. В условиях теоремы обратный оператор l^{-1} переводит пространство l_2 в пространство $W_{2,r}^2$ с нормой

$$\|\omega\|_{W_{2,r}^2}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\Delta^{(2)}\omega_j\right)^2+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\tilde{r}_{j,j}^2(\Delta_-\omega_j)^2\quad\left(\omega=\{\omega_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}\right)$$

По теореме 1.2 [40] при выполнении условия (3.4.1), (3.4.2) пространство $W_{2,r}^2$ вложено компактно в l_2. Теорема доказана.

Лемма 3.4.1 Пусть $\{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.3.1, наложенным на последовательность $\{\tilde{r}_{j,j}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ и выполнены неравенства

$$\left(\sum_{j=s}^{0}r_j\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{r_s(-s)}\quad(s<0),\ \left(\sum_{j=0}^{k}r_j\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{r_k k}\quad(k>0). \tag{3.4.3}$$

Тогда для каждого $\{y_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}\in D(l)$ выполняется неравенство

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sqrt{r_n}\,y_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_0\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(r_n|\Delta_-y_n|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4.4}$$

Замечание 3.4.1 Условие (3.4.3) выполнено, например, для последовательности $\{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, такой, что $r_k\le r_{k+1}$ $(k=0,1,...)$ и $r_m\ge r_{m+1}$ $(m=-1,-2,...)$.

Доказательство. Сначала покажем, что существует постоянная $C_1>0$, такая, что для каждого $g=\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\in l_2$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n\sum_{j=0}^{n}a_j\right)g_n\right| \le C_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|g_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.4.5)$$

На самом деле, меняя порядок суммирования в левой части выражения (3.4.5) и применяя неравенство Гельдера, получаем следующее:

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n\sum_{j=0}^{n}a_j\right)g_n\right| \le \left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\sum_{j=0}^{n}u_jg_j\right| \le \left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_na_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{|v_n|}\sum_{j=0}^{n}|u_jg_j|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Затем, применяя Лемму 3.2.2, где вместо величин u_n, a_j, v_j, p выбраны, соответственно, $\frac{1}{\sqrt{v_n}}$, $\frac{u_j}{\sqrt{v_n}}$, $\frac{\sqrt{v_n}}{u_j}$, p', оценим последний сомножитель следующим образом:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{|v_n|}\sum_{j=0}^{n}|u_jg_j|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 2\sup_{n=0,1,2,\ldots}\left[\left(\sum_{j=n}^{+\infty}|v_j|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}|v_n|^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=0}^{n}u_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|g_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Итак

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n\sum_{j=0}^{n}a_j\right)g_n\right| \le \left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_na_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\sup_{n=0,1,2,\ldots}\left[\left(\sum_{j=n}^{+\infty}|v_j|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{|v_n|}}\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}u_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|g_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогичным методом, применяя Лемму 3.2.3, получаем следующую оценку:

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(u_n\sum_{j=-n}^{-1}a_j\right)g_n\right| \le \left(\sum_{n=-\infty}^{-1}|v_na_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\sup_{n=-1,-2,\ldots}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{-n}|v_j|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{|v_n|}}\cdot\left(\sum_{j=-n}^{-1}u_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}|g_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Объединив две последние неравенства, согласно определения нормы линейного фонкционала, имеем

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(|u_n|\sum_{j=-n}^{n}a_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\left\{\sup_{s=-1,-2,\ldots}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{-s}\left|v_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{|v_s|}}\cdot\left(\sum_{j=s}^{0}u_j{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\sup_{s=0,1,2,\ldots}\left[\left(\sum_{j=s}^{+\infty}\left|v_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{|v_s|}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}u_j{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}\cdot\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}v_j^2a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В этом неравенстве обозначив $\sum_{j=-n}^{n}a_j=y_n$, и подставляя вместо u_n и v_n, соответственно, числа $\sqrt{r_n}$ и r_n $(n\in Z)$. Тогда, в силу условий леммы наложенные на r_n получим

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{r_n}y_n\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\le\left\{\sup_{s=-1,-2,\ldots}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{s}\left|r_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2|r_s|}}\cdot\left(\sum_{j=s}^{0}r_j\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\right.$$

$$\left.\sup_{s=0,1,2,\ldots}\left[\left(\sum_{j=s}^{+\infty}\left|r_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2|r_s|}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}r_j\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}\cdot\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_j^2\left(\Delta_-y_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sup_{s=-1,-2,\ldots}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{-s}r_j{}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-s}\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}\sup_{s=0,1,2,\ldots}\left[\left(\sum_{j=s}^{\infty}r_j{}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{s}\right]\right\}$$

$$\cdot\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_j^2\left(\Delta_-y_j\right)^2.$$

Тогда, в силу (3.3.4), имеет место (3.4.5). Из (3.4.5) и известного определения нормы через элементы сопряженного пространства, вытекает неравенство (3.4.4). Лемма доказана.

Теорема 3.4.2 Пусть для последовательности $\{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ выполнены условия (3.3.3), (3.3.4) и (3.4.3). Тогда оператор l^{-1} компактен в пространстве l_2.

Доказательство. Из неравенств (3.4.4) и (3.3.3) получимследующее $\left(y=\{y_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}\in D(l)\right)$:

$$\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\left|y_{n+1}-y_n\right|^2+\sqrt[4]{1+n^2}\left|y_n\right|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\le C_0\|ly\|_2 . \qquad (3.4.6)$$

Рассмотрим множество $M=\left\{y\in l_2:\|ly\|_2\le 1\right\}$. Из (3.4.5) и известного утверждения (Теорема 3 [41, IX тарау]) вытекает, что множество M является компактным в l_2. Следовательно, оператор l^{-1} компактен в пространстве l_2. Теорема доказана.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 3.3.2 обратный l^{-1} является ограниченным оператором, который переводит пространство l_2 в нормированное пространство W с нормой

$$\|y\|_W=\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\left|y_{n+1}-y_n\right|^2+\sqrt[4]{1+n^2}\left|y_n\right|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$l^{-1}\in\mathscr{L}(l_2,W)$.

k -м сингулярным (аппроксимативным) числом оператора l^{-1} называют величину

$$s_k\left(l^{-1}\right)=\inf_{K\in\mathscr{L}_{k-1}}\left\|l^{-1}-K\right\|_{l_2\to l_2}, \quad k=1,\,2,\dots .$$

Здесь $\mathscr{L}_{k-1}$ - множество операторов, размерности (точнее, размерности их областей значений) которых не превосходит $k-1$. Известно, что $s_k\left(l^{-1}\right)$ равны k -му собственному значению самосопряженного оператора $\sqrt{\left(l^{-1}\right)^*\left(l^{-1}\right)}$.

Если выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[s_k\left(l^{-1}\right)\right]^p<+\infty$$

при некотором $p\in[1,+\infty)$, то говорят, что оператор l^{-1} принадлежит классу Шаттена σ_p. В этом случае, также, говорят, что оператор l^{-1} имеет конечный тип.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.4.3 Пусть последовательность $r=\{r_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ коэффициентов оператора l удовлетворяет условиям теоремы 3.4.2. Тогда

$$s_k\left(l^{-1}\right)\le\frac{C}{1+\sqrt[4]{k}},\ k=0,1,2,\dots . \qquad (3.4.7)$$

Доказательство. Через E обозначим оператор вложения приведенного выше пространства W в l_2. Тогда нетрудно видеть, что $s_k\left(l^{-1}\right)=s_k(E)$, $k=0,1,2,\dots$. Пусть

$N(\lambda, E)$ есть количество аппроксимативных чисел $a_k = a_k(E)$ оператора E, не меньших, чем заданное число $\lambda > 0$:

$$N(\lambda, E) = \sum_{\{k: a_k > \lambda\}} 1$$

(сумма справа увеличивается на 1 каждый раз, когда добавляется очередное аппроксимативное число $a_k = a_k(E)$, превышающее λ). По теореме 5 [41] (глава IX) и доказанной выше теореме 3.3.2 получаем неравенство

$$N(\lambda, E) := \sum_{\{k: a_k(L^{-1}) \geq \lambda\}} 1 \leq \sum_{\left\{k: \frac{1}{3\sqrt{5}(1+k)^{1/8}} \geq \lambda\right\}} 1 .$$

Здесь $\lambda > 0$. Отсюда вытекает, что

$$s_k\left(l^{-1}\right) \leq \frac{C}{1+\sqrt[4]{k}}, \; k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

Теорема доказана.

Следствие 3.4.1 Пусть коэффициент $r = \{r_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ оператора l удовлетворяет условиям теоремы 3.4.2. Тогда $l^{-1} \in \sigma_p$ при $p > 4$.

Доказательство. В силу неравенства (3.4.7) для каждого $p > 4$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[s_k\left(l^{-1}\right)\right]^p \leq C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\sqrt[4]{k}\right)^p} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\frac{p}{4}} < \infty .$$

Следовательно $l^{-1} \in \sigma_p$, $\forall \, p > 4$. Следствие доказано.

Замечание 3.4.2 Мы видели, что при выполнении соотношений (3.4.3) условия разрешимости вырожденного разностного уравнения (3.3.1) и принадлежности его решения в l_2 обеспечивают одновременно компактность резольвенты и ее принадлежность в класс σ_p $(p > 4)$. Это есть одно из отличий уравнения (3.3.1) от разностного уравнения Штурма-Лиувилля.