11 - ЛЕКЦИЯ

Коэрцитивная разрешимость вырожденной разностной системы

В этом пункте мы рассмотрим следующий разностный аналог

$$l_0 y = -\Delta^{(2)} y + R\Delta_- y = F \,, \qquad (3.3.1)$$

сингулярного дифференциального уравнения второго порядка. Здесь

$$y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \;\; \Delta_- y = \{\Delta_- y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \{y_j - y_{j-1}\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \;\; F = \{F_j\}_{j=-\infty}^{+\infty},$$

$\Delta^{(2)} y_j = \{\Delta_+(\Delta_- y_j)\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\quad \Delta_+ y = \{\Delta_+ y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \{y_{j+1} - y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, а $R = (r_{i,j})_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ - действительная матрица. Предположим $F \in l_2$, где l_2 - пространство числовых последовательностей с нормой $\|y\|_2 = \left(\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Ниже приведены условия коэрцитивной разрешимости бесконечной разностной системы (3.3.1). Кроме того, в том случае, когда матрица R диагональна, показаны компактность и конечность типа резольвенты оператора l_0, соответствующего этой системе. Главная особенность уравнения (3.3.1) состоит в том, что его потенциал равен нулю, а когда $\{r_{j,j}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ является неограниченной последовательностью, промежуточный член $R\Delta_- y$ как оператор не подчиняется высшему члену $\Delta^{(2)} y$. В результате возникают новые трудности. Другая особенность состоит в том, что если последовательность $\{r_{j,j}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ является ограниченной, то решение уравнения (3.3.1) не принадлежит пространству l_2. Через $\tilde{l}$ обозначим множество финитных последовательностей:

$$\tilde{l} = \left\{ \{z_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} : \exists N,\, z_j = 0, |j| \geq N \right\}$$

Определение 3.3.1 Если существует последовательность $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty} \subset \tilde{l}$, такая, что $\left\| y^{(n)} - y \right\|_2 \to 0$, $\left\| l_0 y^{(n)} - F \right\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$, то элемент $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2$ называется решением разностной системы (3.3.1).

В настоящем пункте мы получаем достаточные условия для однозначной и коэрцитивной разрешимости системы (3.3.1). Рассмотрим разностный оператор второго порядка l_0, определенный в множестве $\tilde{l}$ и действующий формулой $l_0 y = -\Delta^{(2)} y + R\Delta_- y$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.3.1. Пусть матрица R такая, что

$$\left\langle \left(R - \tilde{R}\right) w, w \right\rangle \geq 0 \qquad (3.3.2)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение в l_2, а диагональная матрица $\tilde{R} = diag\{\tilde{r}_{i,i}, \quad i \in Z\}$ удовлетворяет условиям

$$\tilde{r}_{i,i} \geq 1 \tag{3.3.3}$$

и

$$F^{*} := \sup_{n=0,1,\ldots} \left[\sqrt{n} \left(\sum_{j=n}^{+\infty} \tilde{r}_{j,j}^{\ -1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] < \infty ,$$

$$F^{**} := \sup_{k=0,-1,-2,\ldots} \left[\sqrt{-k+1} \left(\sum_{j=-\infty}^{k} \tilde{r}_{j,j}^{\ -1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] < \infty . \tag{3.3.4}$$

Тогда l_0 является замыкаемым в пространстве l_2 оператором.

Доказательство. Возьмем $w = \{w_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}$ и преобразуем скалярное произведение $\langle l_0 w, \Delta w \rangle$. Используя условия (3.3.2) и (3.3.3), а также легкопроверяемое неравенство $\left\langle \Delta^{(2)} w, \Delta_{\_} w \right\rangle \leq 0$, имеем

$$\|l_0 w\|_2 \geq \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{j,j} \left(\Delta_{\_} w_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Применяя леммы 3.2.2 және 3.2.3, из последнего неравенства и условий (3.3.3), (3.3.4) получим оценку $\|l_0 w\|_2 \geq C \|w\|_2$, $w \in \tilde{l}$. Пусть, теперь для последовательности

$$\left\{ u^{(n)} \right\}_{n=1}^{+\infty} \subset \tilde{l} \quad \left(u^{(n)} = \left\{ u_j^{(n)} \right\}_{j=-\infty}^{+\infty} \right)$$

выполнены следующие соотношения:

$$\left\| u^{(n)} \right\|_2 \to 0 , \ \left\| l_0 u^{(n)} - v \right\|_2 \to 0 \ \ (n \to \infty). \tag{3.3.5}$$

Нам достаточно показать, что $v = 0$. Для любой финитной последовательности $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ выполнено равенство

$$\left\langle l u^{(n)}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \Delta^{(2)} u^{(n)}, \varphi \right\rangle + \left\langle R \Delta_{\_} u^{(n)}, \varphi \right\rangle .$$

Если через R^{*} обозначить матрицу, полученную транспонированием $R = \{r_{i,j}\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$, то

$$\left\langle R \Delta_{\_} u^{(n)}, \varphi \right\rangle = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{i,j} \left(u_j^{(n)} - u_{j-1}^{(n)} \right) \right) \varphi_j =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(u_j^{(n)}-u_{j-1}^{(n)}\right)\sum_{i=-\infty}^{+\infty}r_{i,j}\varphi_i =$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(u_i^{(n)}-u_{i-1}^{(n)}\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_{j,i}\varphi_j\right)=\left\langle \Delta_- y, R^*\varphi\right\rangle=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(u_i^{(n)}-u_{i-1}^{(n)}\right)\left(R^*\varphi\right)_i =$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u_i^{(n)}\left(R^*\varphi\right)_i-\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u_{i-1}^{(n)}\left(R^*\varphi\right)_i=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u_i^{(n)}\left(R^*\varphi\right)_i-\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u_i^{(n)}\left(R^*\varphi\right)_{i+1}=$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u_i^{(n)}\left[\left(R^*\varphi\right)_i-\left(R^*\varphi\right)_{i+1}\right]=-\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u_i^{(n)}\left[\left(R^*\varphi\right)_{i+1}-\left(R^*\varphi\right)_i\right]=-\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u_i^{(n)}\Delta_+\left(R^*\varphi\right)_i \ .$$

Далее,

$$B=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(u_{j+1}^{(n)}-2u_j^{(n)}+u_{j-1}^{(n)}\right)\varphi_j=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[u_{j+1}^{(n)}\varphi_j\right]+2\sum_{j=-\infty}^{+\infty}u_j^{(n)}\varphi_j-$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}u_j^{(n)}\varphi_{j-1}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[-u_j^{(n)}\varphi_{j-1}\right]+2\sum_{j=-\infty}^{+\infty}u_j^{(n)}\varphi_j-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}u_j^{(n)}\varphi_{j+1}=$$

$$=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}u_j^{(n)}\left[\varphi_{j+1}-2\varphi_j+\varphi_{j-1}\right]=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}u_j^{(n)}\left(\Delta^{(2)}\varphi_j\right).$$

Поэтому

$$\left\langle lu^{(n)},\varphi\right\rangle=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}u_j^{(n)}\left(-\Delta^{(2)}\varphi_j-\Delta_+\left(R^*\varphi\right)_j\right)=\left\langle u^{(n)},l^*\varphi\right\rangle. \qquad (3.3.6)$$

φ - заданная финитная последовательность, если $\left\|l^*\varphi\right\|_2\le C_1$, то имеет место оценка

$$\left|\left\langle u^{(n)},l^*\varphi\right\rangle\right|\le\left\|u^{(n)}\right\|_2\cdot\left\|l^*\varphi\right\|_2\le C_1\left\|u^{(n)}\right\|_2 \ .$$

Тогда переходя к пределу в равенстве (3.3.6), устремляя к бесконечности n, а также учитывая соотношение (3.3.5), получим

$$\left\langle v,\varphi\right\rangle=0\,,\ \forall\varphi\in\tilde{l}\ .$$

Множество $\tilde{l}$ финитных последовательностей плотно в l_2. Поэтому из последнего равенства следует $v=0$. Лемма доказана.

Через l обозначим замыкание в l_2 оператора l_0 $\left(D(l_0)=\tilde{l}\right)$.

Теорема 3.3.1 Пусть матрица $R=\left(r_{i,j}\right)_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ удовлетворяет условиям (3.3.2)-(3.3.4). Тогда для каждого $y\in D(l)$ имеет место оценка

$$\left\|-\Delta^{(2)}y\right\|_2 + \left\|R\Delta_- y\right\|_2 \le 3\left\|ly\right\|_2 . \qquad (3.3.7)$$

Доказательство. Пусть $y \in \tilde{l}$ и $\Delta_- y_j = z_j$. Тогда, так как $\Delta^{(2)} y_j = \Delta_+\left(\Delta_- y_j\right)$, уравнение (3.3.1) можно переписать так:

$$-\left(z_{j+1} - z_j\right) + \left(Rz\right)_j = F_j \ \ (j \in Z)$$

Здесь $z = \left\{z_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$. В последней системе j-ое уравнение умножим на z_j затем полученные равенства суммируем по j. Тогда

$$-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{j+1} - z_j\right) z_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(Rz\right)_j z_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} F_j z_j . \qquad (3.3.8)$$

Преобразуем сумму $A := \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{j+1} - z_j\right) z_j$.

$$A = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{j+1} - z_j\right) z_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_{j+1} z_j - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_j z_j =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_j z_{j-1} - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_j z_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_j\left(z_{j-1} - z_j\right) =$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_{j+1}\left(z_{j+1} - z_j\right).$$

Это равенство, если под суммой добавим и вычтем на z_{j+1} выражение z_j, то имеем

$$A = -\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{j+1} - z_j\right)\left(z_{j+1} - z_j\right) - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_j\left(z_{j+1} - z_j\right).$$

Тогда из (3.3.8), (3.3.2) и (3.3.3) получим $\left\|z\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\Delta_+ z\right\|_2^2 \le \sum_{j=-\infty}^{+\infty} F_j z_j$, отсюда, по неравенству Гельдера

$$\frac{1}{2}\left\|-\Delta_+ z\right\|_2^2 + \left\|z\right\|_2^2 \le \frac{1}{2}\left\|F\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|z\right\|_2^2 ,$$

или $\left\|-\Delta_+ z\right\|_2^2 + \left\|z\right\|_2^2 \le \left\|F\right\|_2^2$. Таким образом, $\left\|-\Delta^{(2)} y\right\|_2 \le \left\|F\right\|_2$. Откуда и из (3.3.1) $\left\|R\Delta_- y\right\|_2 \le \left\|F + \Delta^{(2)} y\right\|_2 \le 2\left\|F\right\|_2$. Тогда $\left\|-\Delta^{(2)} y\right\|_2 + \left\|R\Delta_- y\right\|_2 \le 3\left\|F\right\|_2$. Итак для любого $y \in \tilde{l}$ выполнено неравенство (3.3.7).

Пусть, теперь, $y \in D(l)$. Тогда согласно определению оператора l найдется последовательность $\left\{\tilde{y}^{(n)}\right\}_{n=1}^{+\infty} \subset \tilde{l}$ $\left(\tilde{y}^{(n)} = \left\{\tilde{y}_j^{(n)}\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}\right)$ такая, что

$$\left\|\tilde{y}^{(n)} - y\right\|_2 \to 0, \ \left\|l_0\tilde{y}^{(n)} - ly\right\|_2 \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Как уже показано выше,

$$\left\|-\Delta^{(2)}\tilde{y}^{(n)}\right\|_2 + \left\|R\Delta_-\tilde{y}^{(n)}\right\|_2 \le 3\left\|l\tilde{y}^{(n)}\right\|_2, \ \ n \in N .$$

Переходим к пределу, увеличивая n. Используя условие (3.3.3) и полноту l_2 получим неравенство для любого $y \in D(l)$. Теорема доказана.

Согласно (3.3.2) имеем, что существует матрица $\tilde{R} = diag\left\{\tilde{r}_{i,i}, \quad i \in Z\right\}$ ($\tilde{r}_{ii} \ge 1$), для которой

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\tilde{r}_{j,j}\left(\Delta_- y\right)^2 \le \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(R\Delta_- y\right)_j \Delta_- y_j \le \| R\Delta_- y\|_2 \cdot \|\Delta_- y\|_2 ,$$

а в силу условия (3.3.3)

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\tilde{r}_{j,j}\left(\Delta_- y\right)^2 \le \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\tilde{r}_{j,j}\left(\Delta_- y_j\right)^2} \cdot \|\Delta_- y\|_2 .$$

Из последних двух оценок, с учетом (3.3.7) имеем

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\tilde{r}_{j,j}\left(\Delta_- y\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \| R\Delta_- y\|_2 \le 2\|ly\|_2, \ \ y \in D(l). \tag{3.3.9}$$

Лемма 3.3.2 Пусть выполнены условия теоремы 3.3.1. Тогда для любого $y \in D(l)$ имеет место неравенство

$$\|y\|_2 \le C_1\| ly\|_2 . \tag{3.3.10}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{l}_+ = \left\{\left\{z_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l} : z_j = 0, j = -1, -2, ...\right\}$ и $\tilde{l}_- = \left\{\left\{z_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l} : z_j = 0, j = 0,1,2,...\right\}$. Полагая в леммах 3.2.2 и 3.2.3 $p = 2$ и

$$u_n = 1, \ a_n = \Delta_+ y_n = y_{n+1} - y_n, \ v_n = \sqrt{\tilde{r}_{n,n}} \ \ (n \in Z),$$

на основе пункта ii) теоремы 3.2.1 имеем

$$\sum_{j=1}^{+\infty} y_n^2 \le 4 \sup_{n=1,2,..}\left[n\sum_{j=n}^{+\infty} r_{j,j}{}^{-1}\right]\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{\tilde{r}_{n,n}}\Delta_- y_n\right)^2, \ \{y_s\}_{s=1}^{+\infty} \in \tilde{l}_+ ,$$

и

$$\sum_{j=-\infty}^{0} y_n^2 \le 4 \sup_{n=1,2,\dots} \left[(-n+1) \sum_{j=-n+1}^{+\infty} r_{j,j}^{-1} \right] \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\sqrt{\tilde r_{n,n}} \Delta_- y_n \right)^2 ,$$

$\{y_k\}_{k=-\infty}^{0} \in \tilde l_-$. Эти неравенства имеют смысл согласно условиям леммы. Следовательно

$$\|y\|_2^2 \le 4 \sup_{k=0,-1,-2,\dots} \left[(-k+1) \sum_{j=-\infty}^{k} \tilde r_{j,j}^{-1} \right] \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\sqrt{\tilde r_{n,n}}\ \Delta_- y_n \right)^2 +$$

$$+4 \sup_{n=1,2,\dots} \left[n \sum_{j=n}^{+\infty} \tilde r_{j,j}^{-1} \right] \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\tilde r_{n,n}}\ \Delta_- y_n \right)^2 \le$$

$$\le \left[4 \sup_{k=0,-1,-2,\dots} \left[(-k+1) \sum_{j=-\infty}^{k} \tilde r_{j,j}^{-1} \right] + 4 \sup_{n=1,2,\dots} \left[n \sum_{j=n}^{+\infty} \tilde r_{j,j}^{-1} \right] \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\tilde r_{n,n}}\ \Delta_- y_n \right)^2 =$$

$$= 4\left[F^* + F^{**} \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\tilde r_{n,n}}\ \Delta_- y_n \right)^2 ,\ y \in \tilde l\,. \tag{3.3.11}$$

Тогда, в силу неравенства (3.3.9) видим, что неравенство (3.3.10) выполняется для любого $y \in \tilde l$.

Пусть, теперь, $y \in D(l)$. Так как оператор l замкнут, найдется последовательность $\{\tilde y_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \tilde l$ такая, что $\|\tilde y_k - y\|_2 \to 0$, $\|l_0 \tilde y_k - ly\|_2 \to 0$, $k \to \infty$. Согласно (3.3.23) и (3.3.21)

$$\|\tilde y_k\|_2 \le 2\left[\sqrt{F^* + F^{**}} \right] \|l\,\tilde y_k\|_2 ,\ k \in N\,.$$

Переходим в последнем неравенстве к пределу увеличивая k. Тогда по свойству сохранения знака у предела числовой последовательности, получим $\|y\|_2 \le C_1 \|ly\|_2$, $y \in D(l)$, где $C_1 = 2\sqrt{F^* + F^{**}}$. Мы доказали неравенство (3.3.10). Лемма доказана.

Теорема 3.3.2 Пусть матрица $R = \left(r_{i,j} \right)_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ удовлетворяет условиям (3.3.2)-(3.3.4). Тогда для каждого $F \in l_2$ система (3.3.1) имеет, притом единственное решение y и для него справедливо неравенство

$$\left\| \Delta^{(2)} y \right\|_2 + \|R\Delta_- y\|_2 + \|y\|_2 \le C_3 \|F\|_2 . \tag{3.3.12}$$

Доказательство. Пусть элемент

$$y^{(n)} = (\dots, 0, 0, y_{-n}, y_{-n+1}, \dots, y_0, \dots, y_{n-1}, y_n, 0, 0, \dots)\ \ (n \in N)$$

удовлетворяет равенству

$$ly^{(n)} = F_n, \tag{3.3.13}$$

где

$$F_n = (\ldots, 0, 0, f_{-n}, f_{-n+1}, \ldots, f_0, \ldots, f_{n-1}, f_n, 0, 0, \ldots).$$

При выполнении условий теоремы такой $y^{(n)}$ единственен. На самом деле, если $ly^{(n)} = 0$, то в силу оценки (3.3.12) имеем $y^{(n)} = 0$. Следовательно, для любого $F \in \tilde{l}$ система линейных уравнений (3.3.13) имеет единственное решение. Пусть, теперь, $F \in l_2$ и $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in D(l)$. Согласно определению l найдется последовательность $\{z^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty} \subset \tilde{l}$ такая, что

$$\left\| z^{(n)} - y \right\|_2 \to 0, \ \left\| lz^{(n)} - F \right\|_2 \to 0 \ (n \to \infty).$$

В силу (3.3.10), для любых номеров $k, n \in N$ имеем оценку

$$\left\| z^{(n)} - z^{(k)} \right\|_2 \le C \left\| lz^{(n)} - lz^{(k)} \right\|_2.$$

Поэтому последовательность $\{z^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ фундаментальна в l_2. Так как пространство l_2 полное, найдется элемент $v \in l_2$ такой, что $\left\| z^{(n)} - v \right\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$ қатысы орындалады. Итак

$$\left\| z^{(n)} - v \right\|_2 \to 0, \ \left\| lz^{(n)} - F \right\|_2 \to 0 \ (n \to \infty).$$

Тогда, по определению, v - решение системы уравнений (3.3.1). Таким образом, для любого $F \in l_2$ системы уравнений (3.3.1) имеет решение. Единственность этого решения следует из оценки (3.3.10). неравенство (3.3.12) нами было получено в теореме 3.3.1. Теорема доказана полностью.

Определение 3.3.2 Если из соотношений $ly, y \in l_2$ вытекают $\Delta^{(2)}y, R\Delta_- y \in l_2$, то говорят, что оператор $l : l_2 \to l_2$ разделим в l_2.

Из определения следует, что оператор $l : l_2 \to l_2$ разделим тогда и только тогда, если имеет место неравенство

$$\left\| -\Delta^{(2)} y \right\|_2 + \left\| R\Delta_- y \right\|_2 \le C_2 \left(\left\| Ly \right\|_2 + \left\| y \right\|_2 \right), \ y \in D(l).$$

Таким образом, в силу Теоремы 3.3.2, при выполнении условий (3.3.2) - (3.3.4) оператор $ly = -\Delta^{(2)} y + R\Delta_- y$ непрерывно обратим и разделим в l_2.