10 - ЛЕКЦИЯ

Вырожденные разностные уравнения второго порядка

3.1 Введение

В математическом моделировании наряду с дифференциальными уравнениями широко используются системы разностных уравнений. Хорошо известным примером разностных систем являются разностные схемы. Они появляются в приближенном решении начально-краевых задач математической физики. Разностные схемы представляют собой систему конечного числа уравнений с ограниченными коэффициентами. Методы их решения известны из курса вычислительной математики.

В последние 20-30 лет больше внимания обращается на системы, состоящие из бесконечного числа разностных уравнений (в дальнейшем, такую систему коротко назовем бесконечной разностной системой). Например, условия разрешимости линейной и нелинейной бесконечных разностных систем Штурма-Лиувилля и коэрцитивная оценка их решений были получены в [35]. Двусторонняя оценка собственных значений матрицы, соответствующей линейной разностной системе Штурма-Лиувилля, не зависящая от порядка матрицы, показана в работах [36, 30]. В [37-41], с целью использования методов функционального анализа для изучения бесконечных разностных систем, разработана теория вложения разностных аналогов пространств Соболева.

Бесконечные разностные системы описывают реальные процессы в естествознании. Например, широко известная разностная модель популяции насекомых активно используется вместе с ее дифференциальной моделью. В целом, разностная и дифференциальная модели сильно отличаются друг от друга, например, если решение дифференциальной модели является гладким, то решение разностной модели, напротив, очень хаотичное [42, 43]. Более того, любая из существующих дифференциальной и разностной модели отдельно не может адекватно описать процесс во всех возможных режимах.

К бесконечной разностной системе, также, приводит обыкновенный процесс нахождения приближенного решения дифференциальных уравнений, заданных в бесконечной области (последние называются сингулярными дифференциальными уравнениями) [44]. Однако существуют существенные различия между методами решения бесконечной разностной системы и сингулярного дифференциального уравнения. Далее, коэффициенты бесконечно-разностной системы образуют неограниченную последовательность. Неограниченность количества уравнений в системе и последовательности коэффициентов затрудняют их решение.

В настоящем разделе мы рассмотрим вопросы разрешимости и разделимости бесконечных разностных систем второго порядка. Мы предполагаем, что промежуточные коэффициенты рассматриваемых нами систем быстро растут, а последовательность младших коэффициентов не ограничена снизу. Мы также покажем некоторые важные спектральные и аппроксимативные свойства разностных операторов второго порядка, составляющих эти системы.

3.2 Некоторые весовые неравенства типа Харди для числовых последовательностей

Известная теорема Макенхаупта [20] активно использовалась в предыдущем разделе при решении дифференциальных уравнений. Ниже мы приводим некоторые аналоги этой теоремы для последовательностей и их доказательства.

Лемма 3.2.1 Пусть $1 < p < +\infty$. Тогда для выполнения неравенства

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n\sum_{k=0}^{n}a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.2.1}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$B=\sup_{n\ge 0}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}|u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}|v_k|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty \tag{3.2.2}$$

Здесь $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Кроме того, если C - наименьшая постоянная, для которой имеет место (3.2.1), то

$$B\le C\le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}B.$$

Доказхательство. Пусть $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ - положительные числовые последовательности ($0<u_n<\infty,\ 0<v_n<\infty$). Преобразуем выражение, стоящее в левой части (3.2.1).

$$A=\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n\sum_{k=0}^{n}a_k\right|^p \le \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k v_k h_k|\cdot|v_k h_k|^{-1}\right)^p .$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера, а затем меняя порядок суммирования, имеем:

$$A\le \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p\sum_{k=0}^{n}|a_k v_k h_k|^p\left(\sum_{k=0}^{n}|v_k h_k|^{-p'}\right)^{\frac{p}{p'}} =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|a_k v_k h_k|^p\sum_{s=k}^{+\infty}|u_s|^p\left(\sum_{j=0}^{s}\left|v_j h_j\right|^{-p'}\right)^{\frac{p}{p'}}. \tag{3.2.3}$$

Обозначим $h_k=\left(\sum_{s=0}^{k}|v_s|^{-p'}\right)^{\frac{1}{pp'}}$. Известно неравенство [45]:

$$\sum_{k=0}^{s}a_k\left(\sum_{n=0}^{k}a_n\right)^{-\frac{1}{p}} \le p'\left(\sum_{k=0}^{s}a_k\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.2.4}$$

Применим его, тогда

$$\sum_{j=0}^{s}\left|v_j h_j\right|^{-p'} = \sum_{j=0}^{s}\left|v_j\right|^{-p'}\left(\sum_{s=0}^{j}\left|v_s\right|^{-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \leq p'\left(\sum_{j=0}^{s}\left|v_j\right|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда, так как $\frac{p}{p'} = p-1$, имеем

$$\sum_{s=k}^{+\infty}\left|u_s\right|^{p}\left(\sum_{j=0}^{s}\left|v_j h_j\right|^{-p'}\right)^{p-1} \leq (p')^{p-1}\sum_{s=k}^{+\infty}\left|u_s\right|^{p}\left(\sum_{j=0}^{s}\left|v_j\right|^{-p'}\right)^{\frac{p-1}{p'}}$$

По условию (3.2.2)

$$\left(\sum_{j=0}^{s}\left|v_j\right|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq B\left(\sum_{k=s}^{+\infty}\left|u_k\right|^{p}\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Применяя его, а затем оценку (3.2.4) к выражению $\left(\sum_{j=s}^{+\infty}\left|u_j\right|^{p}\right)^{-\frac{1}{p'}}$, получим

$$(p')^{p-1}\sum_{s=k}^{+\infty}\left|u_s\right|^{p}\left(\sum_{j=0}^{s}\left|v_j\right|^{-p'}\right)^{\frac{p-1}{p'}} \leq (p'B)^{p-1}\sum_{s=k}^{+\infty}\left|u_s\right|^{p}\left(\sum_{j=s}^{+\infty}\left|u_j\right|^{p}\right)^{-\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq (p'B)^{p-1}p\left(\sum_{s=k}^{+\infty}\left|u_s\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq (p'B)^{p-1}pB\left(\sum_{j=0}^{k}\left|v_j\right|^{-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} =$$

$$(pB)(p'B)^{p-1}\left|h_k\right|^{-p}.$$

Поэтому согласно (3.2.3)

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n\sum_{k=0}^{n}a_k\right|^{p} \leq p(p')^{p-1}B^{p}\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_k v_k\right|^{p}.$$

Взяв от обеих частей корень p -ой степени, имеем

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n\sum_{k=0}^{n}a_k\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq p^{\frac{1}{p}}(p)^{\frac{1}{p'}}B\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n v_n\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда следует $C \le p^{\frac{1}{p}}(p)^{\frac{1}{p'}}B$.

Докажем, теперь $B \le C$. Пусть $p > 1$ и $0 < \sum_{j=0}^{r} |v_j|^{-p'} < +\infty$, предположим $a_j \ge 0$, и $a_j \ne 0$ при $k \in [0, r]$. Тогда, уменьшая промежуток суммирования от $(0, +\infty)$ до $(r, +\infty)$, в выражении (3.2.1) получим

$$\left(\sum_{j=r}^{+\infty} |u_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{r} |a_k|\right) \le C\left(\sum_{j=0}^{r} |v_j a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.2.5)$$

Полагая $a_j = |v_j|^{-p'}$, из (3.2.5) имеем

$$\left(\sum_{j=r}^{+\infty} |u_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{r} |v_k|^{-p'}\right) \le C\left(\sum_{j=0}^{r} \left(|v_j| \cdot |v_j|^{-p'}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = C\left(\sum_{j=0}^{r} |v_j|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда

$$B = \sup_{r=1,2,\ldots} \left(\sum_{j=r}^{+\infty} |u_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=0}^{r} |v_j|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le C.$$

Все вышеприведенные вычисления верны и тогда, когда u_n, v_n соответственно равны нулю или бесконечности. Поскольку в неравенстве (3.2.1) величины u_n и v_n находятся под модулем, неравенство (3.2.1) выполняется для u_n, v_n с любым знаком. Лемма доказана.

Лемма 3.2.2 Пусть $1 < p < +\infty$. Тогда неравенство

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n \sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \{a_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \tilde{l}_+, \qquad (3.2.6)$$

имеет место в том и только в том случае, если

$$B_0 = \sup_{r=0,1,2,\ldots} \left(\sum_{n=0}^{r} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=r}^{+\infty} |v_n|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Кроме того, если C - наименьшая постоянная, для которой имеет место (3.2.6), то

$$B_0 \le C \le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}B_0.$$

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей леммы, предположим сначала $0<u_n<\infty$ и $0<v_n<\infty$ в (3.2.6). Пусть $\{g_n\}\subset l_{p'}$. Тогда меняя порядок суммирования и применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n\sum_{j=n}^{+\infty}a_j\right)g_n\le\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\sum_{j=0}^{n}u_jg_j=\sum_{n=0}^{+\infty}v_na_n\left(\frac{1}{v_n}\sum_{j=0}^{n}u_jg_j\right)\le$$

$$\le\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_na_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{v_n}\sum_{j=0}^{n}u_jg_j\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (3.2.7)$$

Положим $u_n\sim\dfrac{1}{v_n}$, $a_j\sim u_jg_j$, $p\sim p'$, $v_n\sim\dfrac{1}{u_n}$ в неравенстве

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le C\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_na_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

которое было нами получено в лемме 3.2.1. Тогда

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{v_n}\sum_{j=0}^{n}u_jg_j\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\le$$

$$p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}\sup_{r=1,2,\ldots}\left[\left(\sum_{j=n}^{+\infty}|v_j|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\frac{1}{u_n}\right|^{-p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{u_n}u_ng_n\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}=$$

$$p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}B_0\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|g_n|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty.$$

Следовательно, выражение в левой части (3.2.7) является непрерывным линейным функционалом в пространстве $l_{p'}$ и

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n\sum_{j=n}^{+\infty}a_j\right)g_n\right|\le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}B_0\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|g_n|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_na_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

По определению нормы линейного функционала

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n\sum_{j=n}^{+\infty}a_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\sup_{\|g\|_{p'}=1}\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n\sum_{j=n}^{+\infty}a_j\right)g_n\right|\le$$

$$\le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}B_0\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_na_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Получили (3.2.6).

Пусть, теперь, C - наименьшая постоянная, для которой имеет место (3.2.6). Покажем, что $B_0\le C$. Пусть $r\ge j$, $a_j\ge 0$. Еще предположим $a_j\ne 0$ при $j\in(r,+\infty)$. Уменьшая промежуток суммирования с $(0,+\infty)$ до $(r,+\infty)$ в левой части (3.2.6), имеем

$$\left(\sum_{j=0}^{r}|u_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{j=r}^{+\infty}|a_j|\right)\le C\left(\sum_{j=r}^{+\infty}|v_ja_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2.8}$$

Положим $a_j=|v_j|^{-p'}$, тогда

$$\sum_{j=r}^{+\infty}|v_ja_j|^p=\sum_{j=r}^{+\infty}|v_j|^{(1-p')p}=\sum_{j=r}^{+\infty}\left(|v_j|^{1-\frac{p}{p-1}}\right)^p=\sum_{j=r}^{+\infty}|v_j|^{-p'}.$$

Еще, согласно (3.2.8)

$$C\ge\left(\sum_{j=0}^{r}|u_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=r}^{+\infty}|v_j|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.2.9}$$

Возьмем супремумы по r от обоих частей (3.2.9). Левая часть не зависит от r, а супремум правой части равен B_0. Поэтому $B_0\le C$.

Все вычисления в приведенном доказательстве верны и в том случае, когда u_n и v_n, соответственно, равны нулю или бесконечности. Поскольку в (3.2.6) величины u_n и v_n стоят под модулем, неравенство (3.2.6) выполняется для u_n и v_n с произвольными знаками. Лемма доказана.

Используя доказанную лемму, мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.2.3 Пусть $1<p<+\infty$. Тогда неравенство

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|u_n\sum_{k=-\infty}^{n}a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\widetilde{C}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}|v_na_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \{a_k\}_{k=-\infty}^{-1}\in\widetilde{l}_-, \tag{3.2.10}$$

имеет место в том и только в том случае, если

$$\widetilde{B} := \sup_{\tau=-1,-2,\dots} \left(\sum_{n=\tau}^{-1} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\tau} |v_n|^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

Здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Кроме того, если $\widetilde{C}$ - наименьшая постоянная, для которой имеет место (3.2.10), то

$$\widetilde{B} \le \widetilde{C} \le p^{\frac{1}{p}} (p')^{\frac{1}{p'}} \widetilde{B}.$$

Доказательство. В неравенстве (3.2.10) введем обозначения $k=-s$ $(s \ge 0)$ и $n = -t-1$ $(t \ge 0)$. Тогда левая часть изменится так:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \left| u_n \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \right|^p =$$

$$\sum_{-t-1=-\infty}^{-1} \left| u_{-t-1} \sum_{-s=-\infty}^{-t-1} a_{-s} \right|^p = \sum_{t=+\infty}^{0} \left| u_t \sum_{s=+\infty}^{t} a_s \right|^p = \sum_{t=0}^{+\infty} \left| u_t \sum_{s=t}^{+\infty} a_s \right|^p .$$

А правая часть будет равна $\left(\sum_{t=0}^{+\infty} |v_t a_t|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Поэтому оценка (3.2.10) является следствием (3.2.6). Теперь в выражении B_0 положим $t = -n-1$, тогда

$$\sup_{r=1,2,\dots} \left(\sum_{t=0}^{r} |u_t|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{t=r}^{+\infty} |v_t|^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{r=1,2,\dots} \left(\sum_{n=-1}^{-r} |u_{n+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=-r-1}^{-\infty} |v_{n+1}|^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

или

$$B_0 = \widetilde{B} = \sup_{r=-1,-2,\dots} \left(\sum_{n=r}^{0} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=-\infty}^{r} |v_n|^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty .$$

Сравнивая полученные выражения, получаем доказательство леммы.