9 - ЛЕКЦИЯ

Нахождение условий разрешимости квазилинейного дифференциального уравнения

Рассмотрим следующее квазилинейное уравнение:

$$Ly = -y'' + \left[r(x,y)\right]y' = f(x). \qquad (2.12.1)$$

Здесь $x \in R$, r - действительнозначная функция, $f \in L_2$.

Определение 2.12.1. Функция $y \in L_2$ называется решением уравнения (2.12.1), если существует последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что для любой функции $\theta \in C_0^{\infty}(R)$ выполнены соотношения $\left\|\theta\left(y_n - y\right)\right\|_2 \to 0$, $\left\|\theta\left(Ly_n - f\right)\right\|_2 \to 0$ ($n \to \infty$).

Теорема 2.12.1. Пусть функция $r \geq \delta_0\sqrt{1+x^2}$ ($\delta_0 > 0$) непрерывно дифференцируема по обоим аргументам и удовлетворяет условию

$$\sup_{x,\eta \in R: |x-\eta| \leq 1} \ \sup_{A>0} \ \sup_{|C_1| \leq A, |C_2| \leq A, |C_1 - C_2| \leq A} \frac{r(x,C_1)}{r(\eta,C_2)} < \infty. \qquad (2.12.2)$$

Тогда уравнение (2.12.2) имеет решение y и выполняется соотношение

$$\left\|y''\right\|_2 + \left\|\left[r(\cdot,y)\right]y'\right\|_2 < \infty. \qquad (2.12.3)$$

Доказательство. Пусть ε и A - некоторые положительные числа. Рассмотрим множество

$$S_A = \left\{z \in W_2^1(R):\ \|z\|_{W_2^1(R)} \leq A\right\}.$$

Возьмем функцию v из S_A и рассмотрим следующее «ε- возмущенное» линейное дифференциальное уравнение

$$l_{0,v,\varepsilon}y \equiv -y'' + \left[r(x,v(x)) + \varepsilon\left(1+x^2\right)^2\right]y' = f(x). \qquad (2.12.4)$$

Обозначим через $l_{v,\varepsilon}$ замыкание в норме пространства L_2 дифференциального выражения $l_{0,v,\varepsilon}y$, определенного на $C_0^{(2)}(R)$. Тогда, во-первых,

$$r_\varepsilon(x) := r(x,v(x)) + \varepsilon\left(1+x^2\right)^2 \geq 1 + \varepsilon\left(1+x^2\right)^2.$$

Во-вторых, для $v \in S_A$ и точек $x,\eta \in R$ таких, что $|x-\eta| \leq 1$ выполнена оценка

$$|v(x) - v(\eta)| \leq \sqrt{|x-\eta|}\|v'\|_2 \leq |x-\eta|\|v\|_{W_2^1(R)} \leq A \qquad (2.12.5)$$

Далее, ясно, что

$$\sup_{x,\eta\in R:\,|x-\eta|\le 1} \frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1+\eta^2\right)^2} \le 9 \qquad .$$

Поэтому, полагая $v(x)=C_1$, $v(\eta)=C_2$, с учетом условия (2.12.2) и неравенства (2.12.5), получим

$$\sup_{x,\eta\in R:\,|x-\eta|\le 1} \frac{r_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon(\eta)}$$

$$\le \sup_{x,\eta\in R:\,|x-\eta|\le 1}\ \sup_{A>0}\ \sup_{|C_1|\le A,|C_2|\le A,|C_1-C_2|\le A} \frac{r(x,C_1)}{r(\eta,C_2)} + 9\varepsilon < \infty .$$

Таким образом коэффициент $r_\varepsilon(x)$ уравнения (2.12.4) удовлетворяет всем условиям теорем 2.7.1 и 2.8.1. Тогда уравнение (2.12.4) имеет, притом единственное решение y, а оператор $l_{v,\varepsilon}$ является разделимым. Тогда для решения y выполняется неравенство

$$\left\|y''\right\|_2 + \left\|\left[r(\cdot,v(\cdot))+\varepsilon(1+x^2)^2\right]y'\right\|_2 \le C_3\|f\|_2 . \qquad (2.12.6)$$

По лемме 2.3.3,

$$\|y\|_2 \le C_0\left\|ry'\right\|_2,\ \left\|\left(1+x^2\right)y\right\|_2 \le C_4\left\|\left(1+x^2\right)^2 y'\right\|_2 . \qquad (2.12.7)$$

С учетом (2.12.7) из (2.12.6) получим

$$\|y''\|_2 + \frac{1}{2}\left\|(1+x^2)^2 y'\right\|_2 + \frac{1}{2C_0}\|y\|_2 + \frac{\varepsilon}{C_4}\left\|(1+x^2)y\right\|_2 \le C_3\|f\|_2 .$$

Поэтому существует постоянная $C_5>0$ такая, что справедливо неравенство

$$\|y\|_W := \|y''\|_2 + \left\|(1+x^2)^2 y'\right\|_2 + \left\|\left[1+\varepsilon(1+x^2)\right]y\right\|_2 \le C_5\|f\|_2 . \qquad (2.12.8)$$

Фиксируем $f\in L_2$ и выберем радиус A шара S_A равной $C_5\|f\|_2$. Введем отображение $P(v,\varepsilon): W_2^1(R)\to W$, действующего по формуле $P(v,\varepsilon):=L_{v,\varepsilon}^{-1}f$. Здесь W - банахово пространство функций с нормой $\|\cdot\|_W$. Из оценки (2.12.8) вытекает, что оператор $P(v,\varepsilon)$ переводит шар $S_A\subset W_2^1(R)$ в себя. Более того, $P(v,\varepsilon)$ переводит шар S_A в множество

$$Q_A=\left\{y: \|y''\|_2 + \left\|\left(1+x^2\right)^2 y'\right\|_2 + \left\|\left[1+\varepsilon\left(1+x^2\right)\right]y\right\|_2 \le C_5\|f\|_2\right\}.$$

Множество Q_A компактно в пространстве Соболева $W_2^1(R)$. Действительно, если $y \in Q_A$, $h \neq 0$ и $N > 0$, то справедливы следующие соотношения

$$\|y(\cdot + h) - y(\cdot)\|^2_{W_2^1(R)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[|y'(t+h) - y'(t)|^2 + |y(t+h) - y(t)|^2 \right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left| \int_t^{t+h} y''(\eta) d\eta \right|^2 + \left| \int_t^{t+h} y'(\eta) d\eta \right|^2 \right] dt$$

$$\leq |h| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left| \int_t^{t+h} y''(\eta) d\eta \right| + \left| \int_t^{t+h} | y'(\eta) |^2 \, d\eta \right| \right] dt =$$

$$= |h|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[|y''(\eta)|^2 + |y'(\eta)|^2 \right] d\eta \leq C_6 \| f \|_2^2 |h|^2, \tag{2.12.9}$$

$$\|y\|^2_{W_2^1(R \setminus [-N,N])} = \int_{|\eta| \geq N} \left[|y'(\eta)|^2 + |y(\eta)|^2 \right] d\eta \leq$$

$$\leq \int_{|\eta| \geq N} (1+\eta^2)^{-1} \left[|y''(\eta)|^2 + (1+\eta^2)^2 |y'(\eta)|^2 + (1+\eta^2) |y(\eta)|^2 \right] d\eta \leq$$

$$\leq C_7 \| f \|_2^2 (1+N^2)^{-1}. \tag{2.12.10}$$

Выражения в правых частях неравенств (2.12.9) и (2.12.10) стремятся к нулю при $h \to 0$ и $N \to +\infty$, соответственно. Тогда согласно известному критерию Колмогорова-Фреше, множество Q_A компактно в пространстве $W_2^1(R)$. Поэтому $P(v,\varepsilon)$ является компактным оператором.

Покажем, что оператор $P(v,\varepsilon)$ является непрерывным относительно $v \in S_A$. Пусть $\{v_n\} \subset S_A$ - такая последовательность, что $\|v_n - v\|_{W_2^1(R)} \to 0$ ($n \to \infty$). Пусть y_n и y удовлетворяют равенствам $L_{v,\varepsilon} y = f$, $L_{v_n,\varepsilon} y_n = f$. Согласно определению оператора $P(v,\varepsilon)$, нам достаточно показать, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к y в норме пространства $W_2^1(R)$. Имеем

$$P(v_n,\varepsilon) - P(v,\varepsilon) = y_n - y = L^{-1}_{v_n,\varepsilon} \left[r(x, v_n(x)) - r(x, v(x)) \right] y'_n .$$

Функций $v(x)$ и $v_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ непрерывны по x. По условию теоремы, разность $r(x, v_n(x)) - r(x, v(x))$ также непрерывна по x. Поэтому для каждого $a > 0$ из последнего равенства получаем

$$\|y_n - y\|_{W_2^1(-a,a)}$$

$$\leq c \max_{x\in[-a,a]} \left| r(x, v_n(x)) - r(x,v) \right| \cdot \left\| y'_n \right\|_{L_2(-a,a)} \to 0 \ (n \to \infty)\,. \qquad (2.12.11)$$

Кроме того, $\{y_n\} \in Q_A$, $\|y_n\|_W \leq A$, $y \in Q_A$, $\|y\|_W \leq A$, согласно (2.12.8). Выше мы показали, что множество Q_A компактно в $W_2^1(R)$. Поэтому последовательность $\{y_n\}$ сходится в норме $W_2^1(R)$. Пусть z его предел. Так как $z \in W_2^1(R)$, имеем

$$\lim_{|x|\to\infty} y(x) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} z(x) = 0\,. \qquad (2.12.12)$$

Так как оператор $L_{v,\varepsilon}^{-1}$ замкнут, из (2.12.11) и (2.12.12) вытекает, что $y = z$. Поэтому

$$\left\| P(v_n, \varepsilon) - P(v,\varepsilon) \right\|_{W_2^1(R)} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Таким образом, $P(v,\varepsilon)$ является непрерывным и компактным в $W_2^1(R)$ оператором и переводит шар S_A в себя. Тогда по теореме Шаудера, в шаре S_A существует неподвижная точка y отображения $P(v,\varepsilon)$: $P(y,\varepsilon)=y$. Согласно выбору, y удовлетворяет равенству

$$L_\varepsilon y := -y'' + \left[r(x,y) + \varepsilon(1+x^2)^2 \right] y' = f(x)\,,$$

а из (2.12.6) имеем оценку

$$\left\| y'' \right\|_2 + \left\| \left[r(\cdot, y) + \varepsilon(1+x^2)^2 \right] y' \right\|_2 \leq C_3 \| f \|_2\,.$$

Пусть $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ - последовательность сходящихся к нулю положительных чисел и $P(v,\varepsilon_j) := L_{v,\varepsilon_j}^{-1} f$. Обозначим через $y_j \in S_A$ неподвижную точку оператора $P(v,\varepsilon_j)$, так что

$$L_{\varepsilon_j} y_j := -y_j'' + \left[r(x, y_j) + \varepsilon_j (1+x^2)^2 \right] y_j' = f(x)$$

и

$$\left\| y_j'' \right\|_2 + \left\| \left[r(\cdot, y_j(\cdot)) + \varepsilon \left(1+x^2\right)^2 \right] y_j' \right\|_2 \leq C_3 \| f \|_2\,. \qquad (2.12.13)$$

Пусть (a,b) - произвольный конечный промежуток. Согласно (2.12.13) из последовательности $\{y_j\}_{j=1}^\infty \subset W_2^2(a,b)$ можно выделить подпоследовательность $\{y_{\varepsilon_j}\}_{j=1}^\infty$ такую, что $\left\| y_{\varepsilon_j} - y \right\|_{L_2[a,b]} \to 0$ при $j \to \infty$. Тогда, согласно определению 2.12.1, y - решение квазилинейного уравнения (2.12.1). Переходя к пределу при $j \to \infty$ из неравенства (2.12.13), получим соотношение (2.12.3). Теорема доказана.