# 8 - ЛЕКЦИЯ

## Критерий компактности резольвенты вырожденного оператора

Для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly := -y'' + q(x)y\,,\ q \ge 1\,,\ x \in R = (-\infty, +\infty)\,,$$

известен следующий факт, доказанный Молчановым [24]: для того, чтобы обратный оператор $L^{-1}$ был компактным в пространстве $L_2 := L_2(R)$ необходимо и достаточно, чтобы при каждом $d > 0$ потенциал $q(x)$ удовлетворял условию

$$\lim_{|x| \to +\infty} \int_{x-d}^{x+d} q(t)dt = +\infty\,.$$

Этот результат обобщен в работах [25, 26], главным образом, для дифференциальных операторов, промежуточные члены которых в смысле операторов подчинены сумме старшего и свободного членов.
В случае несамосопряженных операторов такие результаты были получены с использованием тех свойств, которые известны для близких по свойствам полуограниченных операторов. Эти требования не выполняются в случае вырожденных операторов и известных полярных операторов (см. [21, 22]), поэтому для последних требуется разработать принципиально новый метод. Ниже мы показываем один способ получения критерия компактности в $L_2$ резольвенты $l^{-1}$ замкнутого дифференциального оператора

$$ly := -y'' + r(x)y' + s(x)\bar{y}'\,,\ x \in R\,.$$

Пусть $r(x) \ge 1$. Обозначим

$$r^*(x) = \inf_{d>0} \left\{ d^{-1} : d^{-1} \ge \int_{|x-d| \le d} r^2(t)dt \right\}.$$

**Лемма 2.10.1.** Если функция $r(x) \ge 1$ непрерывна и

$$c^{-1} \le \frac{r(x)}{r(t)} \le c\,,\ \ |x-t| \le 1\,,\ x,t \in R\,, \qquad (2.10.1)$$

то выполнены неравенства

$$\gamma^{-1} r(x) \le r^*(x) \le \gamma r(x) \quad (\gamma > 1). \qquad (2.10.2)$$

**Доказательство.** Пусть $d_x = \left[r^*(x)\right]^{-1}$. Тогда, поскольку функция $r(x)$ непрерывна,

$$d_x^{-1} = r^*(x) = \int_{|x-t| \le \frac{d_x}{2}} r^2(t)dt\,. \qquad (2.10.3)$$

Из условия $r \ge 1$ имеем

$$d_x^{-1} \geq \int\limits_{|x-t|\leq \frac{d_x}{2}} dt = d_x,$$

или $d_x \leq 1$. Тогда, согласно (2.10.1), для всех $x,t \in R$, таких, что $|x-t| \leq d_x$, выполнены оценки

$$c^{-1} \leq \frac{r(x)}{r(t)} \leq c.$$

Отсюда и из (2.10.3) следуют неравенства:

$$r^*(x) \leq cr^2(x) \int\limits_{|x-t|\leq \frac{d_x}{2}} dt = cd_x r^2(x) = c\left[r^*(x)\right]^{-1} r^2(x),$$

$$r^*(x) \geq c^{-1}r^2(x) \int\limits_{|x-t|\leq \frac{d_x}{2}} dt = c^{-1}d_x r^2(x) = c^{-1}\left[r^*(x)\right]^{-1} r^2(x).$$

Полагая $\gamma = \sqrt{c}$, в силу последних двух оценок, получим (2.10.2). Лемма доказана.

Оператором вложения $E: A \to B$ называют преобразование, ставящее в соответствие каждому $f \in A$ этот же элемент в пространстве $B$. Если $A$ ограниченно вложено в $B$ (см. Определение 1.2.1), то $E$ является ограниченным линейным оператором. Если, кроме этого, каждое ограниченное множество $M \subseteq A$ является компактным в $B$, то $E$ - компактный оператор.

Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 2.10.2.** Пусть функция $r(t) \geq 1$ $(t > 0)$ непрерывна и на множестве $R_+ := (0,+\infty)$ удовлетворяет условию (2.10.1). Тогда оператор $E: H_2(r,R_+) \to L_2(r,R_+)$ вложения пространства $H_2(r,R_+)$ в $L_2(r,R_+)$ является компактным в том и только в том случае, если

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha_{1,\,r}(t) = 0. \qquad (2.10.4)$$

**Доказательство.** Если условие (2.10.1) выполнено, то по лемме 2.10.1, имеют место неравенства (2.10.2). Согласно теореме 2 [22], вложение $H_2(r,R_+) \subset L_2(R_+)$ является компактным тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha_{1,\,r^*}(t) = 0.$$

Ввиду (2.10.2), это равенство эквивалентно (2.10.4). Лемма доказана.

**Лемма 2.10.3.** Пусть функция $r(\tau) \geq 1$ $(\tau < 0)$ непрерывна и на множестве $R_- := (-\infty;0)$ удовлетворяет условию (2.10.1). Тогда оператор $E: H_2(r,R_-) \to L_2(r,R_-)$ вложения пространства $H_2(r,R_-)$ в $L_2(r,R_-)$ является компактным в том и только в том случае, если

$$\lim_{\tau\to-\infty} \beta_{1,\,r}(\tau) = 0. \qquad (2.10.5)$$

**Доказательство.** Если положить $V(t)=u(-t)$, $r_1(-t)=r_0(t)\quad (t>0)$, то

$$\|u\|_{H_2(r_1,R_-)}=\|V\|_{H_2(r_0,R_+)}$$

и

$$\|u\|_{L_2(R_-)}=\|V\|_{L_2(R_+)}.$$

Поэтому оператор вложения $E_-:H_2(r,R_-)\to L_2(R_-)$ компактно тогда и только тогда, когда компактно $E_1:H_2(r_0,R_+)\to L_2(R_+)$. В силу леммы 2.10.2, оператор $E_1$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}\left(\int_t^{+\infty}\frac{ds}{|r_0(s)|^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{\tau\to-\infty}\sqrt{-\tau}\left(\int_{-\infty}^{\tau}\frac{ds}{|r(s)|^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{\tau\to-\infty}\beta_{1,r}(\tau)=0.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.10.4.** Пусть функция $r(x)\ge 1\quad (x\in R)$ непрерывна и удовлетворяет условию (2.10.1). Тогда оператор $E:H_2(r,R)\to L_2(r,R)$ вложения пространства $H_2(r,R)$ в $L_2(r,R)$ является компактным в том и только в том случае, если

$$\lim_{t\to+\infty}\alpha_{1,r}(t)=0,\ \lim_{\tau\to-\infty}\beta_{1,r}(\tau)=0. \qquad (2.10.6)$$

**Доказательство.** Если обозначить

$$r_-(x)=\begin{cases} r(x), & x\in(-\infty,0],\\ 0, & x\in(0,+\infty),\end{cases}$$

$$r_+(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,0],\\ r(x), & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

то выполняются равенства $r=r_-+r_+$ и

$$\|r\|_{L_2(R)}=\|r_-\|_{L_2(R_-)}+\|r_+\|_{L_2(R_+)}.$$

По леммам 2.10.2 и 2.10.3, вложение $E:H_2(r,R_-)\to L_2(R)$ компактно тогда и только тогда, когда одновременно компактны операторы

$$E_-:H_2(r,R_-)\to L_2(R_-)$$

и

$$E_+:H_2(r,R_+)\to L_2(R_+).$$

Докажем это. Пусть $E_-$ и $E_+$ - компактные операторы. Тогда из лемм 2.10.2 и 2.10.3 следуют равенства (2.10.6). Во-вторых, для любых функций $f \in H_2(r, R_+)$ и $\varphi \in H_2(r, R_-)$ выполнены, соответственно, следующие соотношения:

$$\sup_{\|f\|_{H_2(r,R)}} \|f\|_{L_2(N,+\infty)} \to 0 \ \ (N \to +\infty) \qquad (2.10.7)$$

и

$$\sup_{\|\varphi\|_{H_2(r,R)}} \|\varphi\|_{L_2(-\infty,K)} \to 0 \ \ (K \to -\infty). \qquad (2.10.8)$$

Действительно, по лемме 2.3.1,

$$\|f\|_{L_2(N,+\infty)} \le c \sup_{t \ge N} \sqrt{t-N} \|r^{-1}\|_{L_2(t,+\infty)} \|rf'\|_{L_2(N,+\infty)}$$

$$\le c_1 \sup_{t \ge N} \alpha_{1,\,r}(t) \|f\|_{H_2(r,R_+)}.$$

Отсюда, согласно первому равенству в (2.10.6), вытекает (2.10.7). А согласно второму равенству в (2.10.6), следует (2.10.8). Из (2.10.7) и (2.10.8), используя известную теорему Фреше-Колмогорова, мы получаем компактность вложения $E$.

Допустим, теперь, что $E$ является компактным оператором. Покажем, что операторы $E_+$ и $E_-$ также являются компактными. Предположим противное, пусть, например, оператор $E_+$ не компактен. Тогда, по определению компактности множества, найдется фундаментальная последовательность $\{f_n^+(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset H_2(r, R_+)$, $\|f_n^+\|_{H_2(r,R_+)} \le 1$, которая в $L_2(R_+)$ не сходится. Выберем такую функцию $f_n^+(x)$, что

$$f_n^+(x) = 0, \ x \in (0, \xi), \ \xi > 0.$$

Продолжим $f_n^+(x)$ на множество $R_- \cup \{0\}$ нулем и полученное продолжение обозначим через $f_n(x)$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в пространстве $H_2(r, R)$ и согласно нашего предположения сходится в $L_2(R)$. С другой стороны, согласно выбору, как сужение $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на $R_+$, последовательность $\{f_n^+(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в пространстве $L_2(R_+)$. Получено противоречие. Следовательно, оператор $E_+$ компактен. Аналогично доказывается компактность оператора вложения $E_-$. Лемма доказана.

**Теорема 2.10.1.** Пусть функции $r$ и $s$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию (2.10.2). Тогда резольвента $l^{-1}$ оператора $l$ компактна в пространства $L_2(R)$ в том и только в том случае, если выполнены соотношения (2.10.6).

**Доказательство.** По теореме 2.8.1, резольвента $l^{-1}$ отображает все $L_2(R)$ в пространство $H_2(|r|+|s|, R)$ и непрерывен. Согласно условию (2.4.2), нормы пространств $H_2(|r|+|s|, R)$ и $H_2(r, R)$ эквивалентны. А по лемме 2.10.4, компактность вложения пространства $H_2(r, R)$ в $L_2(R)$ эквивалентна выполнению условия (2.10.6). Теорема доказана.

## 2.11 Оценка поперечников области определения вырожденного дифференциального оператора

Предположим, что функции $r(x)$ и $s(x)$ удовлетворяют условиям (2.4.2) и (2.10.6). Рассмотрим множество

$$M = \{y \in L_2 : \|ly\|_2 \le 1\}.$$

$k$ - поперечниками по Колмогорову множества $M$ в пространстве $L_2$ называют следующие числа:

$$d_k = \inf_{\Sigma_k \subset \{\Sigma_k\}} \sup_{y \in M} \inf_{w \in \Sigma_k} \|y - w\|_2 \ (k = 0,1,2,\dots).$$

Здесь $\{\Sigma_k\}$ - совокупность подпространств $L_2$, размерности которых не превосходят $k$. Количество $k$- поперечников $d_k$, не больших, чем заданное положительное число $\lambda$, обозначают через $N_2(\lambda)$. Займемся оценкой функции $N_2(\lambda)$. Такая оценка важна в вопросах приближенного решения уравнения $ly = f$. Имеет место утверждение.

**Теорема 2.11.1.** Пусть функции $r$ и $s$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям (2.4.2) и (2.10.6). Далее, пусть функция $q$ такая, что $\gamma_{q,\mathrm{Re}\, r} < \infty$. Тогда выполнена следующая оценка

$$c_1 \lambda^{-2} \mu\{x : |q(x)| \le c_2^{-1} \lambda^{-1}\} \le N_2(\lambda) ,$$

где $\mu$ - мера Лебега множества.

**Доказательство.** Из теоремы 2.8.1, по лемме 2.3.3, выполняется неравенство $\|y''\|_2 + \|qy\|_2 \le c\|ly\|_2$, $y \in D(l)$. Поэтому, если обозначить

$$M_1 = \{y \in L_2 : \|y''\|_2 + \|qy\|_2 \le 1\},$$

то $c^{-1} M_1 \subset M \subset c M_1$ (здесь $K M_1 = \{Ky : y \in M_1\}$). Следовательно, оценка в теореме вытекает из теоремы 8.1 [25]. Теорема доказана.

**Пример 2.11.1**. Пусть коэффициенты оператора $l$ равны $r = (1 + x^2)^\beta$ ($\beta > 0$) и $s = 0$. Легко проверить следующее. Если $\beta \ge \frac{1}{2}$, то выполнены условия теоремы 2.8.2. Если же $\beta > \frac{1}{2}$, то выполняются условия теоремы 2.11.1. Поэтому для количества $N_2(\lambda)$ $k$-поперечников $d_k$, не больших, чем заданное положительное число $\lambda$, множества $M = \{y \in L_2 : \|y'' + (1 + x^2)^\beta y'\|_2 \le 1\}$, получаем следующую оценку:

$$c_4 \lambda^{\frac{-2\beta + 3}{2(2\beta - 1)}} \le N_2(\lambda) .$$