7 - ЛЕКЦИЯ

Разрешимость вырожденного дифференциального уравнения

Лемма 2.7.1. Предположим, что функции r и s удовлетворяют условию (2.4.2). Тогда для любого $y \in D(l)$ выполняется оценка

$$\|y'\|_2 + \|y\|_2 \le c\|ly\|_2 . \qquad (2.7.1)$$

Доказательство. Пусть $y \in C_0^{(2)}(R)$. Интегрированием по частям, получим равенство

$$\left(ly, y'\right) = -\int_R y'' \bar{y}' dx + \int_R [r(x)\left|y'\right|^2 + s(x)(\bar{y}')^2]dx . \qquad (2.7.2)$$

Так как

$$A := -\int_R y'' \bar{y}' dx = \int_R y' \bar{y}'' dx = -\bar{A} ,$$

имеем $\operatorname{Re} A = 0$. Поэтому из (2.7.2) вытекает неравенство

$$\operatorname{Re}\left(ly, y'\right) \ge \int_R [\operatorname{Re} r - |s|]\left|y'\right|^2 dx \ge \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\left\|\sqrt{\operatorname{Re}\, r}\; y'\right\|_2 .$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера, условие $\gamma_{1,\operatorname{Re} r} < \infty$ в (2.4.2) и лемму 2.3.3, получаем оценку (2.7.1) для любого $y \in C_0^\infty(R)$.

Если y - элемент области определения $D(l)$, то найдется последовательность функций $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(R)$, для которой выполнены соотношения $\|y_n - y\|_2 \to 0,$ $\|ly_n - ly\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Как мы доказали выше, для y_n выполняется оценка

$$\|y_n'\|_2 + \|y_n\|_2 \le c\|ly_n\|_2 .$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, устремляя n к бесконечности, мы получаем ту же оценку и для y. Лемма доказана.

Теорема 2.7.1. Если функции r и s удовлетворяют условию (2.4.2, то решение уравнения (2.2.1) существует и единственно.

Доказательство. Во-первых, согласно (2.7.1), решение y уравнения (2.2.1) является единственным и принадлежит пространству $W_2^1(R)$. С другой стороны, по лемме 2.4.1, обратный оператор l^{-1} существует и определен на всем пространстве L_2. Лемма доказана.

2.8 Разделимость вырожденного дифференциального оператора

Имеет место утверждение.

Теорема 2.8.1. Предположим, что функции r и s удовлетворяют условию (2.4.2). Тогда для любого $y \in D(l)$ выполняется неравенство

$$\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 + \|s\bar{y}'\|_2 \le c_l \|ly\|_2 . \qquad (2.8.1)$$

Другими словами, оператор l разделим в L_2.

Доказательство. Когда условие (2.4.2) выполнено, в силу леммы 2.6.1, оператор $\mathscr{L}$ разделим в L_2. Тогда, согласно своей структуре, оператор $ly \equiv -y'' + r(x)y' + s(x)\bar{y}'$ также разделим в L_2 и выполняется оценка (2.8.1). Теорема доказана.

2.9 Оценка радиуса фредгольмовости резольвенты вырожденного дифференциального оператора

Фредгольмовы ограниченные операторы детально изучены и имеют богатую теорию, аналогичную теории интегральных операторов второго типа. В этом пункте величины, отвечающие на вопрос, является ли ограниченный оператор фредгольмовым или нет, приведены на примере резольвенты вырожденного дифференциального оператора l^{-1}. Величину

$$\rho_{l^{-1}} = \left[\inf_{T \in \sigma_\infty(L_2)} \|l^{-1} - T\|_{L_2 \to L_2} \right]^{-1}$$

называют радиусом фредгольмовости ограниченного в $L_2 := L_2(R)$ оператора l^{-1} [21]. Здесь σ_∞ - множество компактных в L_2 операторов, а l - замыкание в L_2 оператора

$$l_0 y = -y'' + r(x)y' + s(x)\bar{y}', \; D(l_0) = C_0^{(2)}(R).$$

Пусть выполнены условия (2.4.2). Тогда оператор l непрерывно обратим и разделим в L_2. Обозначим

$$\gamma_0 = \max\left(\lim_{\theta \to -\infty} \beta_{1,\operatorname{Re} r}(\theta), \lim_{t \to +\infty} \alpha_{1,\operatorname{Re} r}(t) \right).$$

Теорема 2.9.1. Пусть r и s являются непрерывно дифференцируемыми функциями и удовлетворяют условию (2.4.2). Тогда для радиуса фредгольмовости $\rho_{L^{-1}}$ оператора L^{-1} справедливы оценки

$$c_2^{-1} \le \rho_{L^{-1}} \gamma_0 \le c_2 . \qquad (2.9.1)$$

Прежде чем доказывать теорему, приводим некоторые вспомогательные утверждения.

Выше мы обозначили $R_- = (-\infty, 0)$, $R_+ = (0, +\infty)$. Пусть $\alpha_{1,\operatorname{Re} r}(t) < +\infty \; (t > 0)$ и $\beta_{1,\operatorname{Re} r}(\tau) < +\infty \; (\tau < 0)$. Согласно лемм 2.3.1 и 2.3.2, выполняются следующие неравенства:

$$\|ry'\|_{L_2(R_+)} \ge c_3 \|y\|_{L_2(R_+)}, \; \|ry'\|_{L_2(R_-)} \ge c_4 \|y\|_{L_2(R_-)}.$$

Таким образом, величина $\|ry'\|_{L_2(R_+)}$ является нормой. Пусть $\tilde{C}_0^{(2)}(R_+)$ ($\tilde{C}_0^{(2)}(R_-)$) - множество дважды непрерывно дифференцируемых на R_+ (R_-) и финитных функций $u(t) \in \tilde{C}_0^{(2)}(R_+)$ ($v(\tau) \in \tilde{C}_0^{(2)}(R_-)$). Пополнение этого множества по норме

$$\|u\|_{H_2(r,R_+)} = \|u''\|_{L_2(R_+)} + \|ru'\|_{L_2(R_+)}$$

$$(\|u\|_{H_2(r,R_-)} = \|u''\|_{L_2(R_-)} + \|ru'\|_{L_2(R_-)})$$

обозначим через $H_2(r,R_+)$ ($H_2(r,R_-)$). Следующее утверждение известно, оно вытекает из теоремы 3 [21].

Лемма 2.9.1. Пусть функция $q(x) \ge \delta > 0$ ($x > 0$) при всех $x,\eta \in R_+$ таких, что $|x-\eta| \le 1$, удовлетворяет неравенствам $c^{-1} \le \dfrac{q(x)}{q(\eta)} \le c$ и пусть оператор вложения пространства $H_2(q,R_+)$ в $L_2(R_+)$ ($E_+ : H_2(q,R_+) \to L_2(R_+)$) ограничен. Тогда для радиуса фредгольмовости ρ_{E_+} оператора E_+ выполняются неравенства

$$c^{-1} \le \rho_{E_+} \gamma_+ \le c\,.$$

Здесь $\gamma_+ = \lim\limits_{t \to +\infty} \alpha_{1,\operatorname{Re} q}(t)$.

Применяя этот результат мы докажем следующее утверждение.

Лемма 2.9.2. Пусть функция $q(x) \ge \delta > 0$ ($x > 0$) при всех $x,\eta \in R_+$ таких, что $|x-\eta| \le 1$ удовлетворяет неравенствам $c^{-1} \le \dfrac{q(x)}{q(\eta)} \le c$ и пусть оператор вложения пространства $H_2(q,R_-)$ в $L_2(R_-)$ ($E_- : H_2(q,R_-) \to L_2(R_-)$) ограничен. Тогда для радиус фредгольмовости ρ_{E_-} оператора E_- выполняются неравенства

$$c^{-1} \le \rho_{E_-} \gamma_- \le c\,.$$

Здесь $\gamma_- = \lim\limits_{\theta \to -\infty} \beta_{1,\operatorname{Re} q}(\theta)$.

Доказательство. По определению

$$\rho_{E_-} = \inf_{T_1 \in \sigma_\infty(L_2(R_-))} \|E_- - T_1\|_{L_2(R_-) \to L_2(R_-)}\,.$$

Если обозначить $u_1(x) = u(-x)$, то

$$\|E_- - T_1\|_{L_2(R_-)} = \sup_{u \ne 0} \frac{\|(E_- - T_1)u\|_{L_2(R_-)}}{\|u\|_{L_2(R_-)}} =$$

$$= \sup_{u_1 \ne 0} \frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{0} |(E_- - T_1)u_1(-x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int\limits_{-\infty}^{0} |u_1(-x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sup_{u_1 \neq 0} \frac{\left[\int_0^{+\infty} \left|(E_+ - T)u_1(t)\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_0^{+\infty} |u_1(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}} = \sup_{u_1 \neq 0} \frac{\|(E_+ - T)u_1\|}{\|u_1\|} =$$

$$= \|E_+ - T\|_{L_2(R_+)} = \rho_{E_+} .$$

Если $u(x) \in H_2(q, R_-)$, то $E_- u \in L_2(R_-)$. Полагая $q_1(x) = q(-x)$, $E_- u_1 \in L_2(R_+)$ и $u_1(x) = u(-x) \in H_2(q_1, R_+)$, имеем $E_- u = E_+ u_1$, где $E_+ : H_2(q_1, R_+) \to L_2(R_+)$. Кроме того, $T_1 u = T u_1$, где $T \in \sigma_\infty\left(L_2(R_+)\right)$. Поэтому $(E_- - T_1)u = (E_+ - T)u_1$. А по лемме 2.9.1 и равенству $\rho_{E_-} = \rho_{E_+}$ вытекает оценки $c^{-1} \leq \rho_{E_-} \gamma' \leq c$. Здесь

$$\gamma' = \lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} \left[\int_t^{+\infty} \frac{dx}{q_1^2(x)}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Осуществляя замены, сначала $x = -z$, затем $t = -\tau$, получим

$$\gamma' = \lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} \left[\int_t^{+\infty} \frac{dx}{q^2(-x)}\right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} \left[\int_{-\infty}^{-t} \frac{dz}{q^2(z)}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{\tau \to -\infty} \sqrt{-\tau} \left[\int_{-\infty}^{\tau} \frac{dz}{q^2(z)}\right]^{\frac{1}{2}} = \gamma_- .$$

Следовательно, $c^{-1} \leq \rho_{E_-} \gamma_- \leq c$. Лемма доказана.

Приведем еще одно известное утверждение.

Лемма 2.9.3 [23]. Пусть $U = \bigcup_k U_k$, $V = \bigcup_k V_k$ - объединения попарно непересекающихся промежутков и пусть $T = \sum_k T_k$ такой оператор, что $T_k : L_p(U_k) \to L_q(V_k)$, $T : L_p(U) \to L_q(V)$, $0 < p \leq q < +\infty$. Тогда

$$\|T\|_{L_p(U) \to L_q(V)} = \sup_k \|T_k\|_{L_p(U_k) \to L_q(V_k)} .$$

Доказательство теоремы 2.9.1. Через $H(\mathrm{Re}\ r, R)$ обозначим пополнение по норме

$$\|u\|_{H_2(r, R_+)} = \|u''\|_{L_2(R_+)} + \|\mathrm{Re}\, r\ u'\|_{L_2(R_+)}$$

множества $C_0^{(2)}(R)$ дважды непрерывно дифференцируемых и финитных функций. Пусть $f \in L_2(R)$, а χ_+ и χ_- соответственно, характеристические функций полуосей R_+ и R_-. Если положить $f_+ = \chi_+ f$, $f_- = \chi_- f$, то $f = f_+ + f_-$. Пусть E - оператор вложения пространства $H(\mathrm{Re}\ r, R)$ в $L_2(R)$, а $T \in \sigma_\infty(L_2(R))$. Тогда

$$(E-T)f=(E-T)_- f_- +(E-T)_+ f_+ . \qquad (2.9.2)$$

Здесь $(E-T)_-$ ($(E-T)_+$) – сужение оператора $E-T$ в $L_2(R_-)$ (в $L_2(R_+)$). Применяя лемму 2.9.3, из равенства (2.9.2) получим

$$\|E-T\|_{L_2(R)} = \sup\left(\|(E-T)_-\|_{L_2(R_-)}, \|(E-T)_+\|_{L_2(R_+)}\right).$$

Отсюда вытекают следующие оценки:

$$\frac{1}{2}\left(\|(E-T)_-\|_{L_2(R_-)} + \|(E-T)_+\|_{L_2(R_+)}\right) \le \|E-T\|_{L_2(R)}$$

$$\le \|E-T\|_{L_2(R)} \le \|(E-T)_-\|_{L_2(R_-)} + \|(E-T)_+\|_{L_2(R_+)} . \qquad (2.9.3)$$

Поэтому

$$\rho_E^{-1} = \inf_{T\in\sigma_\infty(L_2(R))} \|E-T\|_{L_2(R)}$$

$$\le \inf_{T_-\in\sigma_\infty(L_2(R_-))} \|E_- - T_-\|_{L_2(R_-)} + \inf_{T_+\in\sigma_\infty(L_2(R_+))} \|E_+ - T_+\|_{L_2(R_+)}$$

$$= \rho_{E_-}^{-1} + \rho_{E_+}^{-1} \le c_1\gamma_- + c\gamma_+ .$$

Аналогичным образом, из левого неравенства в (2.9.3) следует

$$\rho_E^{-1} \ge \frac{1}{2}\left[\rho_{E_-}^{-1} + \rho_{E_+}^{-1}\right] \ge \frac{1}{2}\left[c_1^{-1}\gamma_- + c^{-1}\gamma_+\right].$$

Из двух последних неравенств получим оценки $c_2^{-1} \le \rho_E\gamma_0 \le c_2$. Отсюда, по теореме 2.8.1, так как оператор l^{-1}, обратный к l, является ограниченным из L_2 в $H_2(\operatorname{Re} r, R)$, следует доказательство теоремы.