6 - ЛЕКЦИЯ

О дифференциальном операторе первого порядка

Через $\mathscr{L}$ обозначим замыкание в норме пространства L_2 дифференциального выражения

$$L_0 z = -z' + rz + s\bar{z}, \tag{2.4.1}$$

определенного на $C_0^{(1)}(R)$. В соответствии с обозначениями раздела 1 $C_{loc}^{(1)}(R)$ означает множество функций f таких, что $\psi f \in C^{(1)}(R)$ для любого $\psi \in C_0^{\infty}(R)$. Предположим, что E есть тождественный оператор, которое отображает пространство L_2 в себя. Для $\lambda \geq 0$ обозначим $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E$.

Лемма 2.4.1. Пусть функции r и s удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} r, s \in C_{loc}^{(1)}(R),\ \gamma_{1,\mathrm{Re}\, r} < \infty, \\ \mathrm{Re}\, r - \rho[|\operatorname{Im} r| + |s|] \geq \delta > 0,\ 1 < \rho < 2, \\ c^{-1} \leq \dfrac{\mathrm{Re}\, r(x)}{\mathrm{Re}\, r(\eta)} \leq c,\ \ |x-\eta| \leq 1,\ \ c > 1. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Тогда существует обратный $(\mathscr{L}_\lambda)^{-1}$ к оператору $\mathscr{L}_\lambda$ и он определен на всем пространстве L_2.

Доказательство. Если z - непрерывно дифференцируемая финитная функция, то, интегрируя по частям, получаем:

$$(\mathscr{L}_\lambda z, z) = -\int_R z'\bar{z}\,dx + \int_R [(r+\lambda)|z|^2 + s\bar{z}^2]dx. \tag{2.4.3}$$

Но

$$T = -\int_R z'\bar{z}\,dx = \int_R z\,\bar{z}'\,dx = -\overline{T}\ .$$

Поэтому $\mathrm{Re}\ T = 0$. Следовательно, из выражения (2.4.3) вытекает

$$\mathrm{Re}(\mathscr{L}_\lambda z, z) \geq c\int_R [\mathrm{Re}\, r + \lambda - |s|]|z|^2 dx. \tag{2.4.4}$$

Применяя неравенство Гельдера в левую часть (2.4.3) и используя условие (2.4.2) к интегралу в уравнении (2.4.4), в результате получим оценку $\|L_\lambda z\|_2 \geq \delta\|z\|_2$. Из этого неравенства следует, что оператор $\mathscr{L}_\lambda$ является обратимым.

Теперь покажем, что обратный $\mathscr{L}_\lambda^{-1}$ определен на всем пространстве L_2. Предположим противное. Пусть $R(\mathscr{L}_\lambda) \neq L_2$, тогда, существует элемент $z_0 \in L_2$, для которого выполняется равенство $(\mathscr{L}_\lambda z, z_0) = (z, \mathscr{L}_\lambda^* z_0) = 0$ при любом $z \in D(\mathscr{L}_\lambda)$ (где $\mathscr{L}_\lambda^*$ -

оператор, сопряженный с $\mathscr{L}_\lambda$). Множество $C_0^{(1)}(R)$ плотно в пространстве L_2. Тогда $D(\mathscr{L}_\lambda)$ также является плотным в L_2. Таким образом, из последнего равенства вытекает, что

$$L_\lambda^* z_0 := z_0' + (\bar{r} + \lambda) z_0 + s\bar{z}_0 = 0, \tag{2.4.5}$$

что выполняется в смысле L_2. Так как функции r и s непрерывны, из (2.4.5) следует, что $(r+\lambda)z_0 + s\bar{z}_0 \in L_{2,loc}(R)$. Тогда, в силу (2.4.5), $z_0' \in L_{2,loc}(R)$.

Возьмем действительную функцию $\theta \in C_0^\infty(R)$ и обозначим $\psi = \theta z_0$. Так как θ финитна, имеем $\left\|(\theta z_0)'\right\|_2 + \|\theta z_0\|_2 < \infty$, следовательно $\psi \in D(\mathscr{L}_\lambda^*)$. Используя равенство (2.4.5) получим $\mathscr{L}_\lambda^* \psi = \theta' z_0$. Таким образом

$$(\mathscr{L}_\lambda^* \psi, \psi) = \int_R \theta'\theta \, |z_0|^2 \, dx. \tag{2.4.6}$$

С другой стороны, учитывая выражение $\mathscr{L}_\lambda^* \psi$, имеем

$$\mathrm{Re}(\mathscr{L}_\lambda^* \psi, \psi) = \int_R \theta^2 [\mathrm{Re}(\bar{r} + \lambda) \, |z_0|^2 + \mathrm{Re}(s\bar{z}_0^2)] dx \geq$$

$$\geq \int_R \theta^2 [\mathrm{Re}\, \bar{r} + \lambda - |s|] \, |z_0|^2 \, dx.$$

Отсюда, используя равенство (2.4.6) и условие (2.4.2), получим

$$\delta \int_R \theta^2 \, |z_0|^2 \, dx \leq \int_R \theta'\theta \, |z_0|^2 \, dx. \tag{2.4.7}$$

Выберем функцию θ таким:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \xi \\ 0, & |x| \geq \xi + 1 \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad |\theta'| \leq C$$

где $\xi > 0$. Тогда из (2.4.7) следует оценка

$$\delta \int_{-\xi-1}^{\xi+1} \theta^2 \, |z_0|^2 \, dx \leq C \left[\int_{-\xi-1}^{-\xi} |z_0|^2 \, dx + \int_{\xi}^{\xi+1} |z_0|^2 \, dx \right].$$

Так как $z_0 \in L_2$, переходя в последнем неравенстве к пределу при $\xi \to +\infty$, имеем равенство $\|z_0\|_2 = 0$. Т.е. $z_0 = 0$. Получили противоречие. Оно показывает, что $R(\mathscr{L}_\lambda) = L_2$. Теперь доказательство леммы вытекает из теоремы Банаха.

2.5 Метод локализации

Пусть $\Delta_j = (j-1, j+1)$ $(j \in Z)$, а последовательность $\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \subset C_0^\infty(\Delta_j)$ удовлетворяет условиям

$$0 \le \varphi_j \le 1 \ (j \in Z), \ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_j^2(x) = 1 .$$

Продолжим функции $r(x)$ и $s(x)$ из промежутка Δ_j на все R так, чтобы их продолжения, обозначаемые, соответственно, через $r_j(x)$ и $s_j(x)$, были непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяли следующим неравенствам:

$$\sup_{z\in R} r_j(z) \le \max_{x\in[j-1,\, j+1]} r_j(x) + \frac{\delta}{4},$$

$$\inf_{z\in R} r_j(z) \ge \min_{x\in[j-1,\, j+1]} r_j(x) - \frac{\delta}{4},$$

$$\operatorname{Re} r_j(x) - \rho[|\operatorname{Im} r_j(x)| + |s_j(x)|] \ge \delta/2, 1 < \rho < 2 \ \ (j \in Z).$$

Через $\mathscr{L}_{\lambda,j}$ обозначим замыкание в пространстве $L_2(R)$ дифференциального оператора $-z' + [r_j(x) + \lambda]z + s_j(x)\bar{z}$, определенного на множестве $C_0^\infty(R)$. Заметим, что оператор $\mathscr{L}_{\lambda,j}$ удовлетворяет условиям (2.4.2). Поэтому, согласно лемме 2.4.1, оператор $\mathscr{L}_{\lambda,j}$ является обратимым, а обратный ему оператор $\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}$ определен на всем пространстве L_2. Кроме того, для любого $z \in D(\mathscr{L}_{\lambda,j})$ справедливо неравенство

$$\left\| (\operatorname{Re} r_j + \lambda)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 \le c_2 \left\| (\operatorname{Re} r_j + \lambda)^{-\frac{1}{2}} \mathscr{L}_{\lambda,j} z \right\|_2 . \tag{2.5.1}$$

По условию (2.4.2), из неравенства (2.5.1) получим оценку

$$\left\| \mathscr{L}_{\lambda,j} z \right\|_2 \ge c_3 \sup_{x\in\Delta_j} [\operatorname{Re} r_j(x) + \lambda] \|z\|_2, \quad z \in D(\mathscr{L}_{\lambda,j}), \tag{2.5.2}$$

Теперь введем операторы B_λ и M_λ равенствами

$$B_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_j'(x) \mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1} \varphi_j f , \qquad M_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_j(x) \mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1} \varphi_j f ,$$

где $f \in L_2$ - финитная функция. При каждом $j \in Z$ функция φ_j может быть отличным от нуля не больше, чем на двух интервалах из набора Δ_j ($j \in Z$). Следовательно, для каждого $x \in R$ число слагаемых в последних суммах не превосходит 2. Поэтому операторы B_λ и

M_λ определены на всем $L_2(R)$. Учитывая тот факт, что операторы $\mathscr{L}_\lambda$ жэне $\mathscr{L}_{\lambda,j}$ совпадают на промежутке Δ_j, легко доказывается равенство

$$\mathscr{L}_\lambda M_\lambda = E + B_\lambda \ . \tag{2.5.3}$$

Используя неравенство (2.5.2) и свойства функций $\varphi_j\,(j \in Z)$, получим равенство $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\|B_\lambda\| = 0$. Тогда найдется положительное число λ_0 такое, что, при всех значениях λ с $\lambda \geq \lambda_0$ выполняется оценка $\|B_\lambda\| \leq \frac{1}{2}$. Тогда из равенства (2.5.3) вытекает, что

$$\mathscr{L}_\lambda^{-1} = M_\lambda (E + B_\lambda)^{-1},\ \lambda \geq \lambda_0, \tag{2.5.4}$$

где $\|E + B_\lambda\| \geq \frac{1}{2}$, $\left\|(E + B_\lambda)^{-1}\right\| \leq 2$.

2.6 Теорема разделимости для дифференциального оператора первого порядка

Определение 2.6.1. Если из включений $z, \mathscr{L} z \in L_2$ следуют $z', rz, s\bar{z} \in L_2$, то оператор $\mathscr{L}$ называется разделимым в пространстве L_2.

Теорема 2.6.1. Предположим, что функции r и s удовлетворяют условию (2.4.2). Тогда оператор $\mathscr{L}$ разделим в пространстве L_2 и для $z \in D(\mathscr{L})$ выполняется следуюая оценка

$$\left\|z'\right\|_2 + \|rz\|_2 + \|s\bar{z}\|_2 \leq c\|\mathscr{L} z\|_2 . \tag{2.6.1}$$

Доказательство. По определению, операторы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E$ разделимы в пространстве L_2, или не разделимы одновременно. Поэтому теорему достаточно доказать для оператора $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E$. Из неравенства (2.4.4) вытекает

$$\left\|\sqrt{\operatorname{Re} r(\cdot) + \lambda}\, z\right\|_2 \leq c_1 \left\|\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re} r(\cdot) + \lambda}} \mathscr{L}_\lambda z\right\|_2 \tag{2.6.2}$$

Легко показать, что оценка (2.6.2) выполняется для каждого $z \in D(\mathscr{L}_\lambda)$. Используя равенство (2.5.4) и свойства функции $\varphi_j\,(j \in Z)$, имеем

$$\left\|(\operatorname{Re} r + \lambda)\mathscr{L}_\lambda^{-1} f\right\|_2 \leq c_4 \sup_{j\in Z}\left\|(\operatorname{Re} r_j + \lambda)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\right\|_{L_2\to L_2} \|f\|_2 . \tag{2.6.3}$$

Кроме того, из неравенства (2.5.2) по условии (2.4.2) получим

$$\sup_{j\in Z}\left\|(\operatorname{Re} r_j + \lambda)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1} F\right\|_{L_2(R)} \leq c_5 \frac{\sup\limits_{x\in\Delta_j}\left[\operatorname{Re} r(x) + \lambda\right]}{\inf\limits_{t\in\Delta_j}\left[\operatorname{Re} r(t) + \lambda\right]}\|F\|_{L_2(R)} \leq$$

$$\le c_5 \sup_{x,z \in R: |x-z| \le 2} \frac{\operatorname{Re} r(x) + \lambda}{\operatorname{Re} r(z) + \lambda} \|F\|_{L_2(R)} \le c_6 \|F\|_{L_2(R)}.$$

Из этого неравенства и из (2.6.3)

$$\|(\operatorname{Re} r + \lambda) z\|_2 \le c_7 \|\mathscr{L}_\lambda z\|_2, \ z \in D(\mathscr{L}_\lambda),$$

а из (2.4.2) имеем

$$\|z'\|_2 + \|(r+\lambda) z\|_2 + \|s\bar{z}\|_2 \le c_8 \|\mathscr{L}_\lambda z\|_2.$$

Отсюда при $\lambda = 0$ следует неравенство (2.6.1). Лемма доказана.