5 - ЛЕКЦИЯ

Теоремы разделимости и их применения

2.1 Введение

В этом разделе мы рассмотрим вопросы существования, единственности и дифференциальные свойства обобщенных решений сингулярных вырожденных дифференциальных уравнений.

Основными проблемами в теории дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами являются существование, единственность и гладкость решения. Аналогично, в случае, когда дифференциальное уравнение задается в бесконечной области, а коэффициенты его не ограничены, важно оценить норму каждого слагаемого, входящего в это уравнение, через норму оператора, соответствующего уравнению. Соответствующее неравенство называется коэрцитивной оценкой. Установление коэрцитивной оценки позволяет точно описать класс, к которому относится обобщенное решение сингулярной краевой задачи. Кроме того, устанавливая коэрцитивную оценку, мы получаем точное описание области определения соответствующего краевой задаче оператора, которая обычно является весовым пространством Соболева. Таким образом, наличие коэрцитивных оценок позволяет использовать современный аппарат теории функциональных пространств для исследования качественных свойств решений сингулярных дифференциальных уравнений.

Коэрцитивная оценка решения для разных классов линейных эллиптических и вырожденных дифференциальных уравнений показана в [1-15]. На основе этих оценок доказаны важные гладкостные и аппроксимативные свойства решений уравнений и получены спектральные свойства дифференциальных и интегральных операторов, которые порождают этих уравнений. Методы, использованные в этих работах, в целом, основаны на глубоких фактах теории вложения функциональных пространств и спектральной теории операторов. Также, в них широко используются теория интегральных операторов в функциональных пространствах и нелокальные априорные оценки обобщенных решений. В свою очередь, эти исследования способствовали развитию теории сингулярных дифференциальных уравнений, спектральной теории операторов, весовых функциональных пространств и теории интегральных операторов.

Однако в работах [1-15] рассматриваются только дифференциальные операторы, промежуточные члены которых в некотором смысле подчинены его слагаемым высшего порядка и потенциалу. Кроме того, основные свойства решений ряда практических задач сводятся к изучению эллиптических уравнений, зависящих от поведения промежуточных членов. Такие уравнения называют вырожденными дифференциальными уравнениями. К ним относятся: уравнения типа Шредингера с промежуточными членами и неограниченным снизу потенциалом, уравнения типа Кортевега де Фриза, коэффициент которого зависит от производных искомого решения, а также дифференциальное уравнение колебаний в средах с сопротивлением, пропорциональным скорости или ускорению.

Несмотря на острую необходимость, вырожденные дифференциальные уравнения изучались только в симметричном случае (см. работы [16-19]), и в них рассматривались только такие задачи, как получение самосопряженности оператора, оценка собственных значений и определение структуры спектра. Поэтому интересно изучать вопросы коэрцитивной разрешимости линейных и нелинейных вырожденных дифференциальных уравнений.

2.2 Постановка задачи

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$ly = -y'' + r(x)y' + s(x)\bar{y}' = f\ , \qquad (2.2.1)$$

где $f \in L_2$, а r и s - заданные комплекснозначные непрерывные функции.

Функция $y \in L_2$ называется решением уравнения (2.2.1), если существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C_0^{\infty}(R)$ такая, что $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|ly_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$. Через l обозначим замыкание в L_2 оператора $l_0 y = -y'' + r(x)y' + s(x)\bar{y}'$, определенного на множестве $C_0^{(2)}(R)$.

Определение 2.2.1. Если из соотношений $y,\ ly \in L_2$ вытекают $y'', ry', s\bar{y}' \in L_2$, то говорят, что оператор l разделим в пространстве L_2.

Разделимость оператора l в пространстве L_2 эквивалентно выполнению неравенства

$$\|-y''\|_2 + \|ry'\|_2 + \|s\bar{y}'\|_2 \le C\left(\|ly\|_2 + \|y\|_2\right).$$

Как показано выше в разделе 1, если оператор l разделим, то решение y уравнения (2.2.1) принадлежит весовому пространству Соболева $W_2^2(R, |r| + |s|)$ с нормой $\|y''\|_2 + \|(|r| + |s|)y'\|_2$. В этом случае задача изучения качественных свойств решений уравнения (2.2.1), а также спектральных и аппроксимативных свойств оператора l сводится к проверке некоторых характеристик оператора вложения пространства $W_2^2(R, |r| + |s|)$ в L_2. В результате мы получаем нужные ответы на некоторые важные вопросы.

С этой целью мы помимо существования и единственности решения уравнения (2.2.1) будем заниматься нахождением условий разделимости оператора l Затем мы изучаем спектральные и аппроксимативные свойства оператора l.

2.3 Некоторые вспомогательные утверждения

Приводим некоторые факты, которые будут использованы для доказательства основных утверждений. Для заданных функций g и h обозначим

$$\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{L_2(0,t)} \|h^{-1}\|_{L_2(t,+\infty)} \ (t > 0),$$

$$\beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{L_2(\tau,0)} \|h^{-1}\|_{L_2(-\infty,\tau)} \ (\tau < 0),$$

$$\gamma_{g,h} = \max\left(\sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t), \sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau)\right).$$

Следующая лемма доказана в работе [20].

Лемма 2.3.1. Если $M = \sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t) < +\infty$, то найдется конечная постоянная C_0 такая, что справедливо неравенство

$$\left\{\int_0^{\infty} \left| g(x) \int_x^{\infty} y(t)dt \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \le C_0 \left\{\int_0^{\infty} |h(x)y(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.3.1)$$

Кроме того, если C_0 является наименьшей из постоянных, для которой справедливо неравенство (2.3.1), то

$$M \le C_0 \le 2M\ .$$

Лемма 2.3.2. Если $N = \sup\limits_{\tau<0} \beta_{g,h}(t) < +\infty$, то найдется конечная постоянная C_1 и выполняется неравенство

$$\left\{ \int_{-\infty}^{0} \left| g(x) \int_{-\infty}^{x} y(t)dt \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \le C_1 \left\{ \int_{-\infty}^{0} \left| h(x)y(x) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.3.2)$$

Кроме того, если C_1 является наименьшей из постоянных, для которой справедливо неравенство (2.3.2), то

$$N \le C_1 \le 2N\ .$$

Доказательство. Пусть $y \in C_0^{(1)}(-\infty, 0)$. Сделаем замену переменной $x = -t$, тогда получим

$$\int_{-\infty}^{0} \left| q(x)y(x) \right|^2 dx = \int_{0}^{+\infty} \left| q(-t)y(-t) \right|^2 dt.$$

Обозначив $y(-t) = z(t)$ и $q(-t) = q_1(t)$ $(t < 0)$, имеем равенство

$$\int_{0}^{+\infty} \left| q(-t)y(-t) \right|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} \left| q_1(t)z(t) \right|^2 dt.$$

Далее, используя неравенство (2.3.1), имеем

$$\int_{0}^{+\infty} \left| q_1(t)z(t) \right|^2 dt \le C_1^2 \int_{0}^{+\infty} \left| r_1(t)z'(t) \right|^2 dt =$$

$$= c_1^2 \int_{0}^{+\infty} \left| r_1(-x_1)z'(-x_1) \right|^2 d(-x_1) = c_1^2 \int_{-\infty}^{0} \left| r_1(x)z'(x) \right|^2 dx \qquad (2.3.3)$$

и

$$M = \sup_{t>0} \left(\int_{0}^{t} \left| q_1(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t}^{+\infty} \left| r_1(x) \right|^{-2} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sup_{t>0} \left(\int_{-t}^{0} \left| q_1(-z) \right|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{-t} \left| r_1(-z) \right|^{-2} dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $r_1(-z) = r(z)$, где $z \in (-\infty, 0)$. Тогда из предыдущих выражений следует

$$\sup_{t>0}\left(\int_{-t}^{0}|q_1(-z)|^2\,dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-t}|r_1(-z)|^{-2}\,dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sup_{t>0}\left(\int_{-t}^{0}|q(z)|^2\,dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-t}|r(z)|^{-2}\,dz\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, полагая $-z = \tau$, получим

$$\sup_{t>0}\left(\int_{-t}^{0}|q(-z)|^2\,dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-t}|r(-z)|^{-2}\,dz\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\tau<0}\beta_{q,r}(\tau) = N.$$

Поэтому, если C_1 является наименьшей из постоянных, для которой справедливо неравенство (2.3.2), то по лемме 2.3.1 справедливы неравенства

$$N \le C_1 \le 2N.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3.3. Пусть функции g, h такие, что $\gamma_{g,h} < \infty$. Тогда для $y \in C_0^{(1)}(R)$ выполняется оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)y(x)|^2\,dx \le C\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)y'(x)|^2\,dx. \tag{2.3.4}$$

Кроме того, если C - наименьшая из постоянных, для которой справедливо неравенство (2.3.4), то

$$\gamma_{g,h} \le C \le 2\gamma_{g,h}.$$

Доказательство. Пусть $y \in C_0^{(1)}(R)$. Обозначим $R_- = (-\infty, 0)$ и $R_+ = (0, +\infty)$. Пусть

$$K = \int_{0}^{+\infty}|\,g(x)y(x)\,|^2\,dx.$$

Полагая в лемме 2.3.1

$$y(t) = \int_{t}^{+\infty}u(\theta)d\theta \quad (t > 0),$$

получим неравенство

$$K \le c^2 \int_0^{+\infty} | h(x) y'(x) |^2 \, dx . \qquad (2.3.5)$$

Если c - наименьшая из постоянных, для которой справедливо неравенство (2.3.5), то справедливы оценки

$$\sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t) \le c \le 2 \sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t) .$$

Аналогично, если

$$S = \int_{-\infty}^{0} | g(x) y(x) |^2 \, dx ,$$

то полагая в лемме 2.3.2

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\tau} u(t) dt \quad (\tau < 0),$$

получим оценку

$$S \le c_1^2 \int_{-\infty}^{0} | h(x) y'(x) |^2 \, dx . \qquad (2.3.6)$$

Если c_1 - наименьшая из постоянных, для которой справедливо неравенство (2.3.6), то

$$\sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau) \le c_1 \le 2 \sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau) .$$

Следовательно, для функции $y \in C_0^{(1)}(R)$ из неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |q(x) y(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} |q(x) y(x)|^2 dx + \int_{0}^{+\infty} |q(x) y(x)|^2 dx$$

$$\le c_1^2 \int_{-\infty}^{0} |r(x) y'(x)|^2 dx + c^2 \int_{0}^{+\infty} |r(x) y'(x)|^2 dx \qquad (2.3.5)$$

вытекает оценка

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x) y(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \le \max(c_1, c) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x) y'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} . \qquad (2.3.6)$$

Кроме того, если c_1 и c выше - наименьшие из постоянных, для которых справедливы неравенства, соответственно, (2.3.6) и (2.3.5), то

$$\max(c_1, c) \le 2 \gamma_{g,h} \ , \ \gamma_{g,h} \le \max(c_1, c) .$$

Лемма доказана.

Определение 2.3.1. Если каждая ограниченная последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества $M \subset L_2(R)$ сходится в $L_2(R)$, то говорят, что множество M компактно в $L_2(R)$.

Следующая лемма является частным случаем теоремы 2.2 [22].

Лемма 2.3.4. Пусть для заданной функции h выполнены соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\int_x^{\infty} h^{-2}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x|}\left(\int_{-\infty}^{x} h^{-2}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Тогда множество

$$F_K = \left\{ y : y \in C_0^{\infty}(R), \int_{-\infty}^{+\infty} | h(t)y'(t)|^2 \, dt \le K \right\}, \; K > 0,$$

компактно в $L_2(R)$.