4 - ЛЕКЦИЯ

Одномерное уравнение Дирака

В этом пункте доказывается теорема единственности для обобщенного решения одной системы дифференциальных уравнений в бесконечной области.

Одномерным уравнением Дирака называют следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u'(x)+a(x)u(x)+b(x)v(x)=f(x) \\ \\ v'(x)+c(x)u(x)+d(x)v(x)=g(x), \end{cases} \qquad (1.10.1)$$

где $x\in(-\infty,+\infty)$, a, b, c, d - непрерывные функции, $f(x)$, $g(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$. Полагая

$$U(x)=(u(x),v(x)),\ Q(x)=\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix},\ F=(f,g),$$

запишем систему (1.10.1) в следующей векторной форме:

$$L_0U=U'(x)+Q(x)U(x)=F(x) \qquad (1.10.2)$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями $L_2((-\infty,+\infty),\ R^2)=L_2(R)\otimes L_2(R)$ и $C_0^{(1)}((-\infty,+\infty),\ R^2)=C_0^{(1)}(R)\otimes C_0^{(1)}(R)$, где $\otimes$ - прямое произведение множеств.

Определение 1.10.1. Вектор-функция $U=(u,v)\in L_2((-\infty,+\infty),\ R^2)$ называется решением системы (1.10.1), если найдется последовательность непрерывно дифференцируемых и финитных вектор-функций $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C_0^{(1)}((-\infty,+\infty),\ R^2)$ такая, что

$$\|U_n-U\|_{L_2}\to 0,\ \|L_0U_n-F\|_{L_2}\to 0\ \ (n\to\infty).$$

Здесь

$$\|U\|_2=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|U(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u^2(x)+v^2(x)\right)dx\right)^{\frac{1}{2}} -$$

норма в пространстве $L_2((-\infty,+\infty),R^2)$.

Докажем априорную оценку для решения системы дифференциальных уравнений (1.10.1). Пусть $U(x)\in C_0^{(1)}((-\infty,+\infty),\ R^2)$. Умножим первое уравнение в (1.10.1) на функцию $u(x)$, второе - на $v(x)$, затем сложим полученные выражения и интегрируем по $(-\infty,\ +\infty)$. Тогда

$$(L_0U,U)=\int_{-\infty}^{+\infty}[(u'+au+bv)u+(v'+cu+dv)v]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (u'u + v'v)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} [(au + bv)u + (cu + dv)v]dx$$

$$= A + \int_{-\infty}^{+\infty} (Q(x)U(x))U(x)dx\,.$$

Интегрируя по частям и учитывая $U(x) \in C_0^{(1)}\left((-\infty,+\infty),\ R^2\right)$, получим

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} (u'u + v'v)dx = \frac{1}{2}\left[u^2(+\infty) - u^2(-\infty) + v^2(+\infty) - v^2(-\infty)\right] = 0\,.$$

Поэтому

$$\left(L_0 U, U\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (Q(x)U)U dx\,.$$

Пусть матрица Q удовлетворяет условию

$$(Q(x)U)U \geq |U|^2\,. \qquad (1.10.3)$$

Тогда

$$\left(L_0 U, U\right) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 dx = \|U\|_2^2\,.$$

Отсюда применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\|U\|_2^2 \leq \left|\left(L_0 U, U\right)\right| \leq \|L_0 U\|_2 \|U\|_2\,.$$

Разделив последнее неравенство на $\|U\|_2$, получим

$$\|U\|_2 \leq \|L_0 U\|_2\,, U \in C_0^{(1)}\left((-\infty,+\infty), R^2\right). \qquad (1.10.4)$$

Теперь, пусть $U(x)$ - обобщенное решение системы (1.10.2). Тогда по определению, найдется последовательность $\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C_0^{(1)}\left((-\infty,+\infty), R^2\right)$ такая, что

$$\|U_n - U\|_2 \to 0\,,\ \|L_0 U_n - F\|_2 \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Согласно неравенству (1.10.4)

$$\|U_n\|_2 \leq \|L_0 U_n\|_2 \ \ (n = 1, 2, 3, \ \dots\ ). \qquad (1.10.5)$$

С другой стороны, по неравенству Шварца

$$\left| \|U_n\|_2 - \|U\|_2 \right| \le \|U_n - U\|_2 , \ \left| \|L_0 U_n\|_2 - \|F\|_2 \right| \le \|L_0 U - F\|_2 ,$$

поэтому справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n\|_2 = \|U\|_2 , \ \lim_{n\to\infty} \|LU_n\|_2 = \|F\|_2 .$$

С учетом последних равенств, переходим к пределу в неравенстве (1.10.5), устремляя n к бесконечности. В результате, используя теорему о сохранении знака предела сходящейся числовой последовательности из курса математического анализа, приходим к следующей оценке:

$$\|U\|_2 \le \|F\|_2 , \tag{1.10.6}$$

где $U(x)$ - решение уравнения (1.10.1). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.10.1. Если матрица $Q(x)$ удовлетворяет условию (1.10.4), то для решения системы уравнений (1.10.1) выполнено неравенство

$$\|U\|_2 \le \|F\|_2 .$$

Теорема 1.10.2. Если матрица $Q(x)$, состоящая из коэффициентов системы дифференциальных уравнений (1.10.1), удовлетворяет условию (1.10.4), то обобщенное решение этой системы единственно.

Доказательство. Предположим противное, пусть $U(x)$ и $W(x)$ есть два разных решения системы уравнений (1.10.1). Положим

$$T(x) = U(x) - W(x),$$

тогда

$$L_0 T = (U(x) - W(x))' + Q(x)(U - W)$$

$$= U' - W' + QU - QW = (U' + QU) - (W' + QW) = F - F = 0 .$$

Поэтому согласно оценке (1.10.6), $\|T\|_2 = 0$, отсюда $T = 0$. Следовательно, $U = W$. Теорема доказана.