3 - ЛЕКЦИЯ

Понятие обобщенного решения

Вводится понятие обобщенного решения дифференциального уравнения. Сравнивается понятия обобщенного и классического решений.

Рассмотрим обычную задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$ly \equiv \frac{dy}{dx} = f(x), \tag{1.7.1}$$

$$y(0) = 0. \tag{1.7.2}$$

Пусть $f(x) \in C[0,1]$. Тогда классическое решение определяется следующим образом. Решением задачи (1.7.1), (1.7.2) называют функцию $y(x) \in C^{(1)}(0,1) \cap C[0,1)$, удовлетворяющей в интервале $(0,1)$ уравнению (1.7.1) и равенству (1.7.2) в точке $x = 0$. Такое решение единственно и представляется так:

$$y = \int_0^x f(t)dt.$$

Определим, теперь, это решение несколько другим способом. Пусть

$$M = \{y : y(x) \in C^{(1)}(0,1) \cap C[0,1),\ y(0) = 0\}.$$

Множество M возьмем за область определения дифференциального оператора l, действующего формулой (1.7.1).

Определение 1.7.1. Обобщенным решением задачи (1.7.1), (1.7.2) называют функцию $y \in M$, удовлетворяющую равенству $ly = f$ в каждой точке промежутка $(0,1)$.

Если $f(x)$ в (1.7.1) является элементом пространства $L_2(0,1)$, то решение задачи (1.7.1), (1.7.2) в классическом смысле нельзя определить. Однако обобщенное решение этой задачи в смысле определения 1.7.1 ввести можно.

Определение 1.7.2. Если для функции $y \in L_2(0,1)$ найдется последовательность $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ такая, что

$$\|y_n - y\|_{L_2(0,1)} \to 0,\ \left\|\frac{dy_n}{dx} - f\right\|_{L_2(0,1)} \to 0$$

при $n \to \infty$, то $y(x)$ называется обобщенным решением задачи (1.7.1), (1.7.2).

Теперь покажем связь обобщенного решения с методом замыкания оператора.

Пусть

$$l = \frac{d}{dx} : L_2(0,1) \to L_2(0,1),$$

а его область определения есть множество $D(l) = \widetilde{C}_0^{(1)}[0,1]$ непрерывно дифференцируемых в $(0,1)$ функций, равных нулю в окрестности точки $x = 0$. Обозначим через L замыкание оператора l в пространстве $L_2(0,1)$. Тогда мы можем объединить равенства (1.7.1) и (1.7.2) в одну запись:

$$Ly = f, \tag{1.7.3}$$

где $y \in \widetilde{C}_0^{(1)}[0,1]$.

Сравнивая приведенные выше определения обобщенного решения и замкнутого оператора, мы приходим к следующему определению, которое эквивалентно определению

Определение 1.7.3. Обобщенным решением задачи Коши (1.7.1), (1.7.2) называют функцию $y \in D(L)$, которая удовлетворяет
равенству (1.7.3).

Определения 1.7.1 и 1.7.3 разные, причина в различии между множествами $D(l)$ и $D(L)$. Определения 1.7.2 и 1.7.3 эквивалентны между собой. Однако, определение 1.7.2 удобно для использования.

Упражнение. Дать определение обобщенного решения задачи

$$By \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x), \ f(x) \in C[0, 1],$$
$$y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$$

Краевая задача для уравнения Штурма-Лиувилля

Вводится обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля с разрывной правой частью.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$ly \equiv -y'' + q(x)y = f(x), \tag{1.8.1}$$

где $x \in (0,1)$, $q(x) \in C[0,1]$, а $f(x) \in L_2(0,1)$. Пусть требуется найти решение $y(x) \in L_2(0,1)$ уравнения (1.8.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 0, \ y(1) = 0. \tag{1.8.2}$$

Обобщенное решение задачи (1.8.1), (1.8.2) определяется так.

Определение 1.8.1. Функция $y(x) \in L_2(0,1)$ называется решением задачи (1.8.1), (1.8.2), если существует последовательность $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C_0^{(2)}(0,1)$ такая, что

$$\|y_n - y\|_{L_2(0,1)} \to 0,\ \|ly_n - f\|_{L_2(0,1)} \to 0\ (n \to \infty).$$

Решение задачи (1.8.1), (1.8.2) также определим через введение замкнутого оператора. Обозначим через L замыкание в $L_2(0,1)$ дифференциального оператора

$$ly \equiv -y'' + q(x)y,$$

определенного в $C_0^{(2)}(0,1)$.

Определение 1.8.2. Решением задачи (1.8.1), (1.8.2) называется функция $y \in D(L)$, для которой имеет место равенство

$$Ly = f.$$

Достаточное условие единственности обобщенного решения

Приводим один метод доказательства единственности обобщенного решения на примере задачи Дирихле (1.8.1), (1.8.2).

Лемма 9.1. Если функция $q(x) \geq 1$ непрерывна в промежутке $[0,1]$, то обобщенное решение задачи (1.8.1), (1.8.2) является единственным.

Доказательство. Возьмем функцию $y(x) \in C_0^{(2)}(0,1)$ и рассмотрим скалярное произведение (ly, y).

$$(ly, y) = \int_0^1 (ly) y dx = \int_0^1 (-y'' + q(x)y) y dx = -\int_0^1 y'' y dx + \int_0^1 q(x) y^2 dx.$$

Интегрируя по частям в первом интеграле, с учетом зануления y на краях $[0,1]$, имеем

$$-\int_0^1 y'' y dx = \int_0^1 (y')^2 dx.$$

Поэтому

$$(ly, y) = \int_0^1 \left[(y')^2 + q(x)y^2\right] dx \geq \|y\|^2_{L_2(0,1)}. \quad (1.9.1)$$

Оценим сверху выражение (ly, y) в левой части неравенства (1.9.1) по неравенству Гелдера

$$\left|\int_0^1 (ly) y dx\right| \leq \left[\int_0^1 (ly)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_0^1 y^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.9.2)$$

Из (1.9.1) и (1.9.2) следует

$$\left[\int_0^1 (ly)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_0^1 y^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \ge \int_0^1 y^2 dx .$$

Разделим обе части последнего неравенства на $\left[\int_0^1 y^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$, тогда

$$\left[\int_0^1 y^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \le \left[\int_0^1 (ly)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\|y\|_{L_2(0,1)} \le \|ly\|_{L_2(0,1)} . \qquad (1.9.3)$$

Покажем теперь, что неравенство (1.9.3) справедливо и для решения задачи (1.8.1), (1.8.2). Предположим, что $y(x)$ - обобщенное решение задачи (1.8.1), (1.8.2). Тогда найдется последовательность функций $\{y_n\} \in C_0^{(2)}(0,1)$ такая, что выполнены соотношения $\|y_n - y\|_{L_2(0,1)} \to 0$, $\|ly_n - f\|_{L_2(0,1)} \to 0$ $(n \to \infty)$. Согласно неравенству (1.9.3)

$$\|y_n\|_{L_2(0,1)} \le \|ly_n\|_{L_2(0,1)} . \qquad (1.9.4)$$

В этом неравенстве мы переходим к пределу при $n \to \infty$ и применяем теорему о сохранении знака предела сходящейся числовой последовательности. Тогда

$$\|y\|_{L_2(0,1)} \le \|Ly\|_{L_2(0,1)} . \qquad (1.9.5)$$

Теперь докажем единственность решения. Предположим противное, пусть z_1 и z_2 есть два различных обобщенных решения задачи (1.8.1), (1.8.2). Согласно определению, найдутся последовательности

$$\{z_{1n}\}_{n\ge1}, \{z_{2n}\}_{n\ge1} \subset C_0^{(2)}(0,1)$$

такие, что

$$\|z_{1n} - z_1\|_{L_2(0,1)} \to 0,\ \|lz_{1n} - f\|_{L_2(0,1)} \to 0\ (n \to \infty)$$

и

$$\|z_{2n} - z_2\|_{L_2(0,1)} \to 0,\ \|lz_{2n} - f\|_{L_2(0,1)} \to 0\ (n \to \infty).$$

Пусть $y^* = z_1 - z_2$ и $y_n^* = z_{1n} - z_{2n}$. Тогда $\|y_n^* - y\|_{L_2(0,1)} \to 0$ и $\|L(y_n^* - y)\|_{L_2(0,1)} \to 0$ $(n \to \infty)$. Так как оператор L линейный, то

$$\left\|Ly^*\right\|_{L_2(0,1)} \le \left\|L\left(y_n^* - y^*\right)\right\|_{L_2(0,1)} + \left\|Ly_n^*\right\|_{L_2(0,1)} = \left\|L\left(y_n^* - y^*\right)\right\|_{L_2(0,1)} + \left\|\left(lz_{1n} - f\right) - \left(lz_{2n} - f\right)\right\|_{L_2(0,1)}$$

$$\le \left\|L\left(y_n^* - y^*\right)\right\|_{L_2(0,1)} + \left\|lz_{1n} - f\right\|_{L_2(0,1)} + \left\|lz_{2n} - f\right\|_{L_2(0,1)} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Следовательно, функция y^* удовлетворяет равенству

$$ly^* = 0.$$

Тогда в силу неравенства (1.9.5)

$$\left\|y^*\right\|_{L_2(0,\,1)} = \left\|z_1 - z_2\right\|_{L_2(0,\,1)} \le \left\|ly^*\right\|_{L_2(0,\,1)} = 0,$$

или $\left\|z_1 - z_2\right\| = 0$. Тогда $z_1 = z_2$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Неравенство (1.9.5) называют априорной оценкой решения.