2 - ЛЕКЦИЯ

Здесь вводится понятие обобщенной производной и показываются ее отличия от производной функции в точке. Приведены примеры вычисления обобщенной производной.

Известно, что производная дифференцируемой функции в заданной точке x определяется формулой

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1.4.1}$$

Ниже мы приводим одно обобщение понятия производной.

Если заданная функция $f(x)$ для любого $\varphi\in C_0^\infty(a,b)$ удовлетворяет соотношению $\varphi f\in L_p(a,b)$ ($1\le p<\infty$), то пишут $f\in L_{p,loc}(a,b)$. Поэтому

$$L_{p,loc}(a,b)=\left\{f:\varphi f\in L_p(a,b),\forall\varphi\in C_0^\infty(a,b)\right\}.$$

В частном случае, классу $L_{p,loc}(a,b)$ принадлежит любая непрерывная, либо имеющая точки разрыва первого рода в интервале (a,b) функция. Например, функция $y=x^2+1$ при каждом $1\le p<\infty$ принадлежит классу $f\in L_{p,loc}(-\infty,+\infty)$.

Определение 1.4.1. Если функция $f\in L_{1,loc}(a,b)$ и для любого $\varphi\in C_0^\infty(a,b)$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\varphi^{(n)}(x)dx=(-1)^n\int_a^b g(x)\varphi(x)dx \quad (n=1,2,\dots),$$

то $g(x)$ называется обобщенной производной n-го порядка функции $f(x)$ в промежутке (a,b) и обозначается $f^{(n)}(x)$.

Отметим, что если функция $f(x)$ в каждой точке $[a,b]$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$, то его обобщенная производная n-го порядка $g(x)$ в (a,b) совпадает с $f^{(n)}(x)$. С другой стороны, функция не дифференцируемая в смысле равенства (1.4.1) может иметь обобщенную производную (см. примеры ниже). Существуют и другие различия между обобщенным производным функции $f(x)$ и ее обычной производной в смысле равенства (1.4.1):

а) понятие обобщенной производной определяется одновременно для всего интервала,

б) для того, чтобы функция $f(x)$ имела обобщенную производную n-го порядка, необязательно, чтобы она имела обобщенные производные ниже n-го порядка.

Пример. Известно, что функция $y=|x-1|$ не дифференцируем (в смысле (1.4.1)) на промежутке $[0,2]$. Покажем, что эта функция имеет обобщенную производную.

На самом деле, интегрируя по частям, для каждого $\varphi\in C_0^\infty(0,2)$ получаем следующие равенства:

$$\int_0^2 |x-1|\varphi'(x)dx = -\int_0^1 (x-1)\varphi'(x)dx + \int_1^2 (x-1)\varphi'(x)dx$$

$$= \varphi(1-) - \varphi(1+) + \int_0^1 (-1)\varphi(x)dx + \int_1^2 1\varphi(x)dx = \int_0^2 \operatorname{sgn}(x-1)\,\varphi(x)dx\,.$$

Здесь

$$\operatorname{sgn}(x-1) = \begin{cases} -1, \ x<1 \\ 1, \ x>1. \end{cases}$$

Таким образом, разрывная фукция $\operatorname{sgn}(x-1)$ является обобщенной производной функции $y=|x-1|$ в промежутке $[0,2]$.

2. Вычислим обобщенную производную второго порядка в промежутке $[0,2]$ функции

$$y = \begin{cases} (x-1)^2, \ 0 \le x < 1 \\ -(x-1)^2, \ 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Интегрируя по частям, для каждого $\varphi \in C_0^\infty(0,2)$ получаем следующее

$$\int_0^2 y\varphi''(x)dx = \int_0^1 (x-1)^2\varphi''(x)dx - \int_1^2 (x-1)^2\varphi''(x)dx$$

$$= \varphi'(1-) - \varphi'(1+) - 2\int_0^1 (x-1)\varphi'(x)dx + 2\int_1^2 (x-1)\varphi'(x)dx$$

$$= -\varphi(1-) + \varphi(1+) + 2\int_0^1 1\cdot\varphi(x)dx - 2\int_1^2 1\cdot\varphi(x)dx = 2\int_1^2 \operatorname{sgn}(1-x)\varphi(x)dx\,.$$

Поэтому

$$\operatorname{sgn}(1-x) = \begin{cases} 1, \ 0<x<1 \\ -1, \ 1<x<2 \end{cases}$$

является обобщенной производной второго порядка в промежутке $[0,2]$ заданной функции. Следует отметить, что обобщенная производная первого порядка в промежутке $[0,2]$ функции y равна

$$y' = \begin{cases} -2(x-1), 0 < x < 1 \\ \\ 2(x-1), 1 < x < 2, \end{cases}$$

т.е. она совпадает с обычной производной y' в смысле (1.4.1). Однако y' не является непрерывно дифференцируемой.

Упражнение. Найти обобщенную производную первого порядка следующих функции в указанных промежутках:

1. $y = \begin{cases} |x-1|, \ 0 \le x < 2 \\ \\ |x-3|, 2 \le x \le 4 \end{cases}, \quad y' - ?$

2. $y = \begin{cases} (2x-3)^2, \ 1 \le x < 2 \\ \\ -(7-3x)^2, \ 2 \le x \le 3 \end{cases}, \quad y'' - ?$

1.5 Пространство Соболева

В данном пункте вводится самый простой пример пространств Соболева - $H_2^1(0,1)$.

Пространства Соболева связаны с понятием обобщенной производной и различаются друг от друга в зависимости от области определения функции, а также порядка дифференцируемости. Общее обозначение соболевских пространств - $H_p^l(a,b)$.

Пусть $1 \le p < +\infty$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, $l = 1,2,...$. Класс функций $f(x)$ из $L_p(a,b)$, обобщенные производные которого вплоть до порядка l на (a,b) принадлежат $L_p(a,b)$, обозначают через $H_p^l(a,b)$. $H_p^l(a,b)$ является нормированным пространством с нормой

$$\| f \|_{H_p^l(a,b)} = \left[\int_a^b | f(x) |^p dx + \sum_{k=1}^{l} \int_a^b | f^{(k)}(x) |^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Нам хорошо известно, что пространство функций $C^{(1)}[0,1]$, непрерывно дифференцируемых в сегменте $[0,1]$, является подпространством пространства $C[0,1]$ непрерывных функций в сегменте $[0,1]$. Аналогично, пространство $H_2^1(0,1)$ функций из $L_2(0,1)$, обобщенная производная первого порядка у которой также принадлежит $L_2(0,1)$, является подпространством $L_2(0,1)$.

Лемма 1.5.1. $H_2^1(0,1)$ - нормированное пространство.

Доказательство. Нам достаточно показать, что функционал

$$\| f \|_{H_2^1(0,1)} = \left[\int_0^1 | f(x)|^2 dx + \int_0^1 | f'(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

является нормой. Проверим аксиомы нормы.

1) Понятно, что $\| f \|_{H_2^1(0,1)} \geq 0$. А если $\| f \|_{H_2^1(0,1)} = 0$, то

$$\left(\int_0^1 | f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0, \ \left(\int_0^1 | f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Тогда почти всюду в $[0,1]$ справедливо равенство $f(x) = 0$.

2) $\| \lambda f \|_{H_2^1(0,1)} = \left(\int_0^1 |\lambda f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |\lambda f'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \cdot \| f \|_{H_2^1(0,1)}$.

3) По неравенству Минковского

$$\| f + g \|_{H_2^1(0,1)} = \| f + g \|_{L_2(0,1)} + \| f' + g' \|_{L_2(0,1)}$$

$$\leq \| f \|_{L_2(0,1)} + \| g \|_{L_2(0,1)} + \| f' \|_{L_2(0,1)} + \| g' \|_{L_2(0,1)} = \| f \|_{H_2^1(0,1)} + \| g \|_{H_2^1(0,1)}.$$

Лемма доказана.

В пространстве $H_2^1(0,1)$ (комплекснозначных функций) можно ввести скалярное произведение следующей формулой:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx.$$

Следовательно $H_2^1(0,1)$ - гильбертово пространство.

Упражнение. Доказать, что функционал

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx$$

является скалярным произведением.

1.6 Замкнутые операторы

В этом пункте дается определение замкнутого оператора и алгоритм замыкания оператора.

Введем понятие замкнутого оператора, важного для изучения дифференциальных уравнений. Пусть X - полное нормированное пространство с нормой $\| \cdot \|_X$. Предположим, что $A: X \to X$ линейный оператор, а его область определения $D(A)$ плотна в X.

Определение 1.6.1. Если $A: X \to X$ и для любой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset D(A)$ такой, что $\|z_n - z\|_X \to 0$, $\|Az_n - y\|_X \to 0$ ($n \to +\infty$), выполняются соотношения $z \in D(A)$ и $Az = y$, то A называется замкнутым оператором.

Если $D(A)$ плотна в X, а оператор $A: X \to X$ не является замкнутым, то его можно расширить до нового замкнутого оператора $B: X \to X$ следующим приемом. Для каждой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset D(A)$, удовлетворяющей соотношениям $\|z_n - z\|_X \to 0$, $\|Az_n - y\|_X \to 0$, будем полагать, что $z \in D(B)$ и $Bz = y$. Тогда окажется, что $B: X \to X$ и $D(A) \subset D(B)$, а для каждого элемента $z \in D(A)$ выполнено равенство $Bz = Az$, т.е. оператор B является расширением оператора A. Во-вторых, оператор $B: X \to X$ - замкнутый оператор. В результате область определения $D(A)$ незамкнутого оператора A специальным образом расширена до $D(B)$, чтобы B, сохраняя действие A, стал замкнутым оператором.

Заметим, что оператор $A: X \to X$ может иметь разные замкнутые расширения. Области определения их входят друг в друга. Тот оператор среди них, который имеет наименьшую область определения называется замыканием оператора A в пространстве X и обозначается через $\overline{A}$.

Пример. Рассмотрим обычный оператор дифференцирования:

$$T = \frac{d}{dx} : C[0,1] \to C[0,1].$$

Предположим, что $D(T) = C_0^{(2)}(0,1)$, т.е. его область определения состоит из дважды непрерывно дифференцируемых в промежутке $(0,1)$ функций, которые равны нулю вблизи точек $x = 0$ и $x = 1$. Этот оператор T не замкнут. Покажем это. Пусть последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset D(T)$ такая, что

$$\|z_n - z\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |z_n(x) - z(x)| \to 0,$$

$$\|Tz_n - y\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |z_n'(x) - y(x)| \to 0 \ (n \to +\infty).$$

Тогда по теореме о почленном дифференцировании функциональной последовательности $y \in C[0,1]$ и $y = z'(x)$. Тогда, $z(x) \in C^{(1)}[0,1]$ и $z(0) = z(1) = 0$, однако $z(x) \notin D(T)$. Итак T не является замкнутым.

Если оператор T_1 выберем так;

$$T_1 = \frac{d}{dx} : C[0,1] \to C[0,1], \ D(T_1) = \{u(x) \in C^{(1)}[0,1], u(0) = u(1) = 0\},$$

то нетрудно получить, что T_1 является замыканием вышеприведенного оператора T в пространстве $C[0,1]$.

Упражнение. Показать, что оператор $B = \dfrac{d^2}{dx^2} : C[0,1] \to C[0,1]$ двухкратного дифференцирования с $D(B) = C_0^{(3)}[0,1]$ - множество трижды непрерывно дифференцируемых в $[0,1]$ функций, которые обращаются в нуль в окрестности точек $x=0$ и $x=1$, не является замкнутым.