1 - ЛЕКЦИЯ

Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

1.1 Метрические и нормированные пространства

Возьмем множество X и функционал $\rho : X \times X \to [0;+\infty)$. Если выполнены следующие три условия

1. $\forall x, y \in X$, $\quad \rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y \in X$, $\quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\forall x, y, z \in X$, $\quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$,

тогда функционал ρ называется метрикой. Простым примером $\rho(x, y)$ является расстояние между двумя точками x и y на числовой оси. Пара $\{X, \rho\}$ называется метрическим пространством.

1. $\rho(x, y) = |x - y|$.
2. $x(t),\ y(t) \in C[0,1],\ \rho(x, y) = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|$.
3. $f(t), g(t) \in C^{(m)}[0,1]$,

$$\rho(f, g) = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| + \sum_{j=1}^{m} \max_{t \in [0,1]} \left| f^{(j)}(t) - g^{(j)}(t) \right|.$$

4. $f(t), g(t) \in L_2[0,1], \qquad \rho(f, g) = \int\limits_0^1 \left| f(t) - g(t) \right|^2 dt.$

Функционал $\| \cdot \|_X : X \to [0,+\infty)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $\forall x \in X$, $\quad \|x\|_X \geq 0, \|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x \in X, \lambda \in C$, $\quad \|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X$;
3. $\forall x, y \in X$, $\quad \|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$

называется нормой.

Множество X, в котором определена норма, называется нормированным пространством.

В нормированном пространстве X можно ввести метрику с равенством $\rho(x, y) = \|x - y\|_X$.

Упражнения.

1. Докажите, что множество $C[0, 1]$ образует нормированное пространство по $\|x\|_{C[0,\,1]} = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$.

2. Покажите, что $\|f\| = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ является нормой.

1.2 Пространство L_p

В этом разделе вводится понятие пространства L_p и на примерах показаны некоторые особенности функций, принадлежащих в пространство L_p в ограниченных и неограниченных интервалах.

Класс функций, интегрируемых на интервале $(0,1)$ в смысле Лебега, обозначается через $L_1(0,1)$:

$$L_1(0,1)=\left\{ f(x): x\in(0,1),\ \|x\|_1=\int_0^1 |f(x)|dx<\infty \right\}.$$

Здесь функционал $\|x\|_1$ является нормой, и следовательно $L_1(0,1)$- нормированное пространство.

Приведем примеры функции, принадлежащих в $L_1(0,1)$:

а) Если $f(x)\in C[0,1]$, то $f\in L_1(0,1)$;

б) Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0,1]$ точки разрыва первого рода, то $f\in L_1(0,1)$;

в) Функция $y=\frac{1}{x^{\alpha}}$ ($\alpha>0$) принадлежит в $L_1(0,1)$ тогда и только тогда, когда $\alpha<1$.

Упражнения:

1. При каких значениях $k>0$ функция $y=\frac{1}{\sin^k x}$ принадлежит $L_1(0,1)$?
2. При каких значениях $s>0$ функция $y=tg^{-s}x$ принадлежит $L_1(0,1)$?

Пусть $1<p<\infty$. Тогда множество

$$L_p(0,1)=\left\{ f(x): \|f\|_p=\left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty \right\}$$

является нормированным пространством, а $\|\cdot\|_p$ будет его нормой.

Примеры:

а) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то $f\in L_p(0,1)$.

б) Функция $y=\frac{1}{\sin^k x}$ ($k>0$) принадлежит $L_p(0,1)$ если $k<\frac{1}{p}$. Если $k\geq\frac{1}{p}$, то $\frac{1}{\sin^k x}\notin L_p(0,1)$.

Определение 1.2.1. Если для двух нормированных пространств X и $У$ выполняются следующие соотношения:

1. $X\subseteq У$,
2. $\forall z\in X$, $\|z\|_Y\leq C\|z\|_X$ (здесь C - положительная постоянная, не зависящая от z),

то говорят, что пространство X вложено в Y, это обозначается так: $X\mapsto У$.

Лемма 1.2.1. Если $1<p<\infty$, то пространство $L_p(0,1)$ вложено в $L_1(0,1)$.

Доказательство. Действительно, если функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_p(0,1)$, то по неравенству Гельдера

$$\|f\|_{L_1(0,1)} = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$\le \left(\int_0^1 1^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p(0,1)}.$$

Тогда $L_p(0,1) \mapsto L_1(0,1)$. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим пространство функций, определенных на бесконечном интервале. Пусть $1 \le p < \infty$. По определению

$$L_p(1,+\infty) = \left\{ f(x) : \|f\|_{L_p(1,+\infty)} = \left(\int_1^{+\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Здесь интеграл является несобственным.

Примеры:

1. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$) принадлежит в пространство $L_p(1,+\infty)$ в том и только в том случае, если $\alpha > \dfrac{1}{p}$.
2. Функции $f(x) = 1$ и $f(x) \ge \delta > 0$ не принадлежат пространству $L_p(1,+\infty)$.

Рассмотрим еще одно пространство.

$$L_p(0,+\infty) = \left\{ f(x) : \|f\|_{L_p(0,+\infty)} = \left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty \right\}, \ 1 \le p < \infty.$$

Примеры:

1. Пусть числа α и β удовлетворяют условию $0 < \beta < p < \alpha$. Тогда функция

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\beta}, & x \in [0,1], \\ \dfrac{1}{x^\alpha}, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

принадлежит пространству $L_p(0,+\infty)$.

2. Примером функции, принадлежащей пространству $L_p(0,+\infty)$ ($1 \le p < \infty$) является

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Упражнения.

1. Принадлежит ли функция

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le 5,\\ \dfrac{1}{x^{\alpha}}, & 5<x<+\infty,\ \alpha p>1\end{cases}$$

пространству $L_p(0,+\infty)$?

2. При каких значениях α функция

$$f(x)=\frac{\cos^2 x+3}{\left(x^2+1\right)^{\alpha}}$$

принадлежит пространству $L_p(0,+\infty)$?

3. При каких значениях p функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ будет принадлежать пространству $L_p(-\infty,+\infty)$?

1.3 Множество $C_0^{\infty}(a,\, b)$

Через $C_0^{\infty}(a,\, b)$ обозначают множество бесконечно дифференцируемых в интервале (a,b) функций, обращающихся в нуль вместе со своими производными любого порядка в точках $x=a$ и $x=b$.

Множество $C_0^{\infty}(a,b)$ обладает следующими свойствами:

а) Если $f(x)$, $g(x)\in C_0^{\infty}(a,b)$, то $f(x)+g(x)\in C_0^{\infty}(a,b)$;

б) Если $f(x)\in C_0^{\infty}(a,b)$ и k - постоянная, то $kf(x)\in C_0^{\infty}(a,b)$. Следовательно, $C_0^{\infty}(a,b)$ - линейное пространство.

Определение 1.3.1. Пусть X полное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, а B - его подмножество. Если для каждого $u\in X$ найдется последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset B$ такая, что справедливо соотношение $\|u_n-u\|_X\to 0$ ($n\to+\infty$), то говорят, что множество B плотно в X.

Известно следующее утверждение.

Лемма 1.3.1. Если $1\le p<\infty$ и $-\infty\le a<b\le+\infty$, то множество $C_0^{\infty}(a,b)$ плотно в пространстве $L_p(a,b)$.